بسم الله الرحمن الرحیم

اللّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضی و آمار (۲)

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی ـ علوم و معارف اسلامی

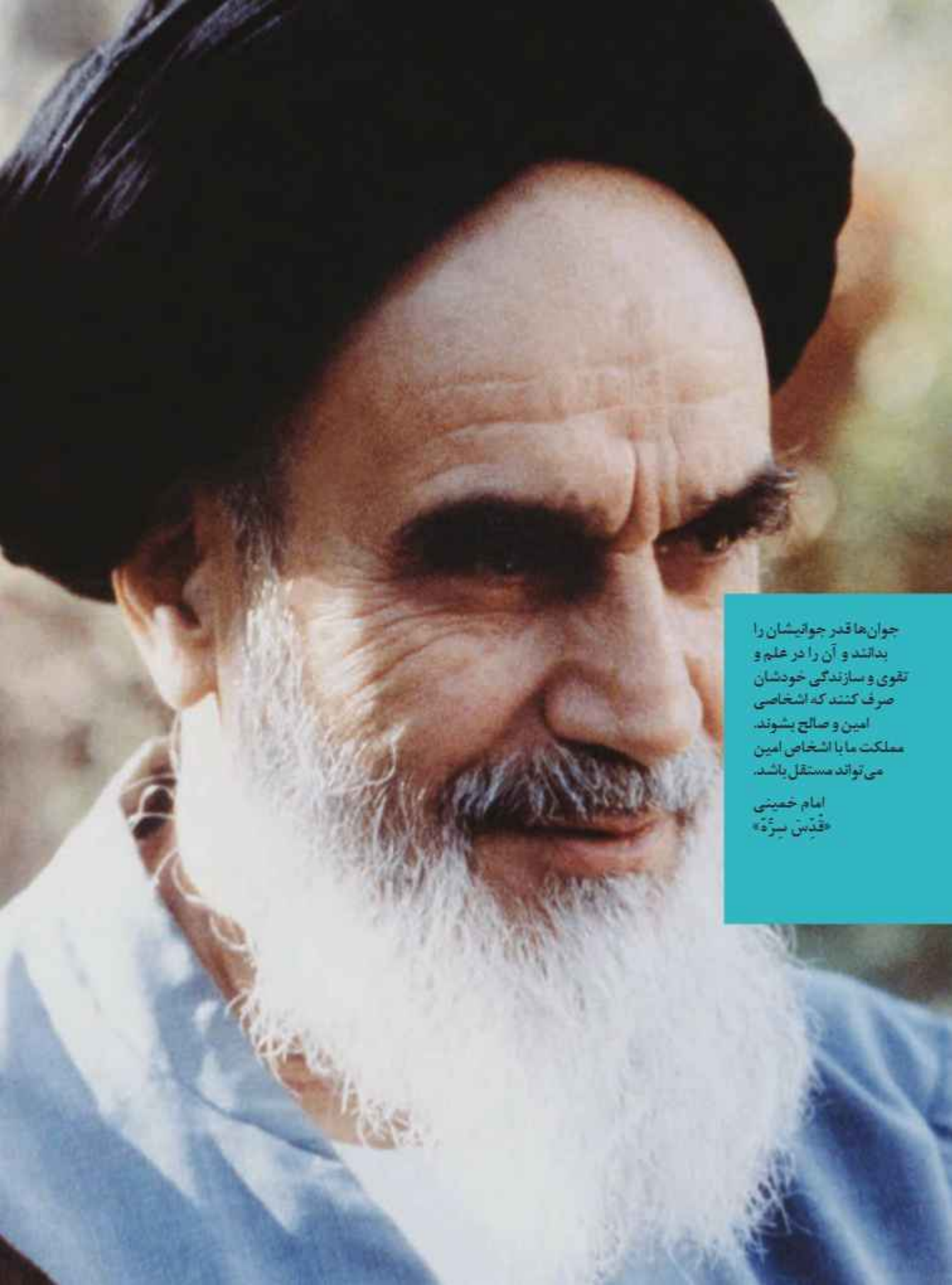
پایهٔ یازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضی و آمار(۲) ـ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۱۲۱۲
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، ناصر بروجردیان، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، آزاده حسین قرزان، عادل محمدپور، حسین میرزایی و هادی مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف)
مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امیتی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ جواد صفری (مدیر هنری) ـ سمیه قنبری (صفحه‌آرا) ـ سوروش سعادتمندی، علی نجمی، سیدکیوان حسینی، کبری اجابتی، ناهید خیام‌باشی و فاطمه رئیسیان‌فیروزآباد (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
پایگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ هشتم ۱۴۰۳

شابک ۲ـ۲۷۶۷ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978_964_05_2767_2



جوان‌ها قدر جوانیشان را بدانند و آن را در علم و تقوی و سازندگی خودشان صرف کنند که اشخاصی امین و صالح بشوند. مملکت ما با اشخاص امین می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی
«قدس سرّه»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به‌صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

فهرست

فصل ۱ ــ آشنایی با منطق و استدلال ریاضی ۱
درس ۱ : گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها ۲
ترکیب گزاره‌ها ۴
ترکیب عطفی دو گزاره ۴
ترکیب فصلی دو گزاره ۵
ترکیب شرطی دو گزاره ۶
ترکیب دو شرطی ۸
درس ۲ : استدلال ریاضی ۱۲

فصل ۲ ــ تابع ۲۱
درس ۱ : توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی ۲۲
انواع توابع ۲۵
تابع ثابت ۲۶
تابع چندضابطه‌ای ۲۷
تابع همانی ۳۰
درس ۲ : توابع پلکانی و قدر مطلقی ۳۴
تابع پلکانی ۳۴
تابع علامت ۳۵
تابع جزء صحیح ۳۷
تابع قدرمطلق ۴۰
درس ۳ : اعمال بر روی توابع ۴۵

فصل ۳ ــ آمار ۵۵
درس ۱ : شاخص‌های آماری ۵۶
خط فقر ۵۷
تورم ۶۰
درس ۲ : سری‌های زمانی ۶۳
سری زمانی ۶۴
درون‌یابی ۶۶
برون‌یابی ۶۸
منابع ۷۱

مقدمه

کتاب ریاضی پایه یازدهم برای تدریس دو ساعت در هفته تألیف شده و مطالب آن در راستای اهداف برنامه درسی ریاضی تألیف و تدوین شده است. مطالب این کتاب حدود و دامنهٔ کار دبیران محترم را مشخص کرده و توقع مؤلفین و دفتر تألیف نیز همین است که مطالب کتاب بی‌کم و کاست و بدون هیچ اضافاتی به لحاظ موضوع و مفهوم جدید، تدریس شود.

به عنوان مثال در فصل اول هیچ اثبات هم ارزی بین گزاره‌ها و بدون استفاده از جدول خواسته نشده حتی یک تمرین هم در این مورد وجود ندارد و لذا طرح چنین سؤال‌هایی چه در کلاس و چه در سؤال‌های ارزشیابی جایز نیست.

دانش‌آموزان در سال دهم، درسی به نام منطق را گذرانده و لذا با مبحث منطق و تا حدی گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها آشنا بوده و به همکاران محترم توصیه می‌کنیم به کتاب درسی منطق نظری داشته باشند تا با آنچه دانش‌آموزانشان به عنوان زمینه و پیش نیاز یاد گرفته‌اند، آشنا شوند. در این صورت و با این نگاه کلیات مطالب فصل اول برای دانش‌آموزان جدید نمی‌باشد.

در فصل دوم با یادآوری تعریف و مفهوم تابع، به معرفی انواع تابع‌ها و اعمال جبری روی آنها پرداخته شده است. در معرفی انواع تابع‌ها سعی شده است تا به صورتی مشهودی و کاربردی دانش‌آموزان مدل‌هایی از این توابع را

که در زندگی روزمره آنها نیز به چشم می‌خورد، درک کرده و بر اساس آن به ضابطه‌های آنها پی ببرند. در فصل آخر و در ادامه مطالب آمار پایه دهم و با هدف بالا بردن سواد آماری، شاخص‌های آماری و به دنبال آن سری‌های زمانی معرفی می‌شوند.

در سراسر کتاب سعی بر آن است تا با رویکرد و آموزش از طریق حل مسئله، برای آموزش مفاهیم اصلی با طرح فعالیت‌های مناسب دانش‌آموزان مفهوم مورد نظر را ساخته و به کمک معلمین محترم، آن مفهوم پرداخته و تحلیل شود و نهایتاً در کار در کلاس‌ها و مثال‌های حل شده تعمیق یا تعمیم یافته و تثبیت شوند.

از همهٔ همکاران و کارشناسان و دبیران محترم تقاضا داریم ما را از نظرات و پیشنهادات سازنده خودشان بهره‌مند نموده و از طریق رمزینه سریع پاسخ نظرسنجی کتاب‌های درسی با ما در ارتباط باشند.

مؤلفان

فصل ۱ــ آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

درس ۱ گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

درس ۲ استدلال ریاضی

قُل هاتوا بُرهانَکُم اِنْ کُنتُم صادِقینَ

(آیه ۱۱۱ بقره)

«بگو اگر راست می‌گویید دلیل خود را بیاورید»

درس ۱

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

منطق[۱] در لغت به معنای «آنچه به گفته درآمده» و عموماً آن را به معنای بررسی استدلال‌ها تعبیر می‌کنند. کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال‌هاست. امروزه منطق صرفاً به عنوان شاخه‌ای از فلسفه شمرده نشده و در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز به آن پرداخته می‌شود.

تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است. با تکیه بر این تعبیر می‌توان ادعا کرد که منطق‌دانان و افرادی که با منطق مأنوس‌ترند، بسیار کمتر از دیگران در استدلال‌ها اشتباه می‌کنند.

از میان انواع منطق و کاربردهای آن در این فصل قصد داریم شما را با منطق ریاضی[۲] که شاخه‌ای از ریاضیات است و به بیان ریاضی گونهٔ منطق می‌پردازد، آشنا کنیم. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است.

در بین جملاتی که ما از آنها استفاده می‌کنیم، جملات خبری از اهمیت و جایگاه ویژه‌ای برخوردارند و به‌ویژه صدق و کذب یا درستی و نادرستی این خبرها برای ما و مخاطب ما اهمیت دارد. به‌عنوان مثال وقتی شما به دوست خود می‌گویید: «من امروز ساعت ۸ صبح در محل قرار حضور داشتم.» خبری را برای او بیان می‌کنید که صدق یا کذب این خبر برای شما و دوستتان مهم است.

در منطق ریاضی به هر جملهٔ خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) را به آن نسبت بدهیم، یک **گزاره** گفته می‌شود.

جمله‌های غیر خبری مانند «چه هوای خوبی» یا «شما اهل کجایید؟» و همچنین جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آنها را تعیین کنیم، گزاره نیستند؛ مثلاً «درس فلسفه از درس عربی آسان‌تر است».

فعالیت

۱. کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

الف) شما چند سال دارید؟

ب) عدد ۲ عددی اول است.

پ) عدد $\sqrt{۲}$ عددی گویا است.

ت) افلاطون شاگرد ارسطو است.

ث) $۲+۳\times۴=۲۰$

ج) عدد $(-۱)^n$ عددی همواره مثبت است. $(n \in N)$

چ) سیب قرمز از سیب زرد خوش‌مزه‌تر است.

ح) لطفاً تخته را پاک کن.

۱ـ Logic

۲ـ Mathematical Logic

۲. دو گزارهٔ درست و دو گزارهٔ نادرست بیان کنید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشند.

گاهی اوقات گزاره‌ای که بیان می‌کنیم، ترکیبی از دو یا چند گزاره است. در این صورت برای تشخیص درستی یا نادرستی این گزاره‌ها که به گزاره‌های ترکیبی معروف‌اند، باید بیشتر تأمل کنیم و آنها را دقیق‌تر بررسی کنیم. به عنوان مثال جملهٔ «۳ عددی فرد است و $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است»، از ترکیب دو گزارهٔ سادهٔ «۳ عددی فرد است» و «$\sqrt{۲}$ عددی گنگ است» توسط حرف ربط «و» ساخته شده است. واضح است که ارزش این گزارهٔ ترکیبی به ارزش دو گزارهٔ سادهٔ مذکور بستگی دارد. اگر هر دو گزاره نادرست باشند، ارزش گزارهٔ ترکیبی چیست؟ اگر هر دو درست باشند، چه ارزشی برای آن قائل هستید؟ اگر یکی از گزاره‌ها درست و دیگری نادرست باشد، چه پاسخی می‌دهید؟ در حالت کلی برای یک گزارهٔ ترکیبی که از ترکیب دو گزاره به دست آمده، و نسبت به ارزش‌های این دو گزاره، چند حالت می‌توان در نظر گرفت؟ آیا حروف ربط دیگری برای ترکیب دو گزاره وجود دارد؟

برای پاسخ به سؤال‌های اخیر نیاز داریم تا از نمادها و قراردادهایی استفاده کنیم. به مجموعهٔ این قراردادها و نمادگذاری‌ها جبر گزاره‌ها یا حساب گزاره‌ها گفته می‌شود.

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا r یا ... نمایش می‌دهیم. در سه جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده است. شما جدولی را برای نمایش وضعیت ارزشی چهار گزاره تشکیل دهید.

p
د
ن

$۲^۱=۲$

p	q
د	د
ن	د
د	ن
ن	ن

$۴=۲^۲$= تعداد حالت‌های ارزشی دو گزاره

p	q	r
د	د	د
ن	د	د
د	ن	د
ن	ن	د
د	د	ن
ن	د	ن
د	ن	ن
ن	ن	ن

$۸=۲^۳$= تعداد حالت‌های ارزشی سه گزاره

نقیض یک گزاره : نقیض گزارهٔ p را با نماد $(\sim p)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت «نقیض p» یا «چنین نیست که p» می‌خوانیم.

از آنجا که هر گزاره یک جملهٔ خبری است و حتماً دارای فعل، برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم و واضح است که با این کار ارزش گزارهٔ p اگر درست باشد، ارزش گزارهٔ $(\sim p)$ نادرست و اگر p گزاره‌ای نادرست باشد، ارزش گزارهٔ $(\sim p)$ درست خواهد بود.

به عنوان مثال، نقیض گزارهٔ «a مثبت است»، به صورت «a مثبت نیست» بیان می‌شود. به جدول زیر توجه کنید :

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

کار در کلاس

در هر یک از حالت‌های زیر نقیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

الف) عدد ۵ زوج است.

ب) تساوی «۴=۲×۲» برقرار است.

پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است.

ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.

ث) ایران در منطقهٔ غرب آسیا قرار دارد.

ج) $(۳\times۷) < (۵\times۴)$

در مثال قبل اگر نقیض گزارهٔ «a مثبت است»، را به صورت «a منفی است» تعبیر کنیم، این دو گزاره نقیض هم نیستند؛ زیرا وقتی a مثبت نباشد، یا منفی است یا صفر است، در صورتی که «a منفی است» شامل صفر نمی‌شود.

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و در حساب گزاره‌ها، به صورت‌های متفاوتی می‌توان گزاره‌های ساده را با هم ترکیب و گزاره‌های مرکب تولید کرد. در این کتاب، ترکیب گزاره‌ها توسط ۴ رابط «و»، «یا»، «شرطی» و «دو شرطی» انجام می‌شود. هر گزارهٔ مرکب که از ترکیب دو یا بیشتر از دو گزارهٔ ساده تولید می‌شود، خودش یک گزاره است و باید بتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم. به گزاره‌های ترکیبی زیر توجه کنید؛

الف) «۵ عددی فرد است و ۴ عددی اول است».

ب) «۱۲۱ مضرب ۱۲ است یا $\sqrt{۳}$ مثبت است».

پ) «اگر من مسلمان باشم، آنگاه نبوّت حضرت رسول اکرم ﷺ را قبول دارم».

ت) «اگر n عددی زوج باشد، آنگاه $n^۲$ زوج است و اگر $n^۲$ زوج باشد، آنگاه n زوج است».

هر یک از گزاره‌های ترکیبی فوق از ترکیب دو گزاره به دست آمده‌اند و اگر از شما بخواهیم ارزش هر یک از آنها را تعیین کنید، شاید کمی مشکل به نظر برسد، ولی آنچه که مسلّم است این است که ارزش گزاره‌های ترکیبی فوق به ارزش (درستی یا نادرستی) گزاره‌های سادهٔ تشکیل‌دهندهٔ آنها و نوع رابط به کار رفته بین آنها بستگی دارد.

۱. ترکیب عطفی دو گزاره : گزارهٔ «عدد ۳ فرد است و ۷ عددی اول است» را در نظر بگیرید. چه استنباطی نسبت به درستی یا نادرستی این گزاره دارید؟ نسبت به صدق و کذب گزارهٔ «افلاطون شاگرد ارسطو است و عدد ۴ زوج است»، چه استنباطی دارید؟ کاملاً واضح است که صدق یک گزارهٔ مرکب که از ترکیب دو گزارهٔ ساده با لفظ یا حرف ربط «و» تشکیل شده است، درستی هر دو گزاره را طلب می‌کند. به نظر شما گزارهٔ دومی چه ارزشی دارد؟ توجه دارید که افلاطون شاگرد ارسطو نبوده است!

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ «و» ترکیب کنیم، از نماد «$\wedge$» بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و آن را **ترکیب عطفی** دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم. «$p\wedge q$»؛ و آن را به صورت «p و q» می‌خوانیم. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره با توجه به جدول صفحهٔ بعد تعیین می‌شود :

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشند، «$p \wedge q$» نادرست است.

فعالیت

در جدول زیر روبه‌روی گزاره‌های داده شده ارزش آنها را با علامت ✓ مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده شده با یک گزارهٔ ساده، گزاره مرکب را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد		
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همهٔ سوره‌های آن با بسم‌الله شروع می‌شود.		
۳	..... و ۸ زوج است.		✓
۴	کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و	✓	
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		
۶	۲ < ۵ و		✓

۲. ترکیب فصلی دو گزاره : اگر شخصی به شما بگوید؛ «آن حیوان، پرنده است یا مهره‌دار است»؛ صدقِ گفتهٔ او را در چه صورتی تأیید می‌کنید؟ اگر پس از بررسی معلوم شود که حیوان مورد نظر نه پرنده بوده است و نه از تیرهٔ مهره‌داران بوده است، آیا گزارهٔ مذکور دارای ارزش درست بوده است؟ در واقع صدق یک گزارهٔ مرکب که از ترکیب دو گزارهٔ ساده با لفظ «یا» تشکیل شده است، در صورتی تأیید می‌شود که حداقل یکی از دو گزارهٔ ساده، ارزش درست داشته باشند.

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ «یا» با هم ترکیب کنیم، از نماد «$\vee$» استفاده می‌کنیم و آن را ترکیب فصلی دو گزاره نامیده و می‌نویسیم «$p \vee q$» و آن را به صورت «p یا q» می‌خوانیم. ارزش ترکیب فصلیِ دو گزاره با توجه به جدول زیر تعیین می‌شود :

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره نادرست باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره، ارزش درست داشته باشد، در این صورت ارزش ترکیب فصلیِ آنها درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است		
۲	حضرت مهدی (عج) امام دوازدهم شیعیان است یا	✓	
۳	۹۱ عددی مرکّب است یا	✓	
۴	..... یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است.		✓
۵	..... یا	✓	

۳. ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه بخواهیم از گزارهٔ p گزارهٔ q را نتیجه بگیریم، از نماد «$\Rightarrow$» استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم : «$p \Rightarrow q$» و آن را به صورت‌های زیر می‌خوانیم :

(اگر p آنگاه q) ، (p نتیجه می‌دهد q را) ، (q از p نتیجه می‌شود)

در گزارهٔ شرطیِ «$p \Rightarrow q$»، p را **مقدم** و q را **تالی** می‌نامیم.

ارزش گزارهٔ شرطی «$p \Rightarrow q$» با توجه به جدول زیر تعیین می‌گردد :

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم؛ یعنی p درست بوده ولی تالی یعنی q دارای ارزش نادرست باشد (از یک گزارهٔ درست نتیجه‌ای نادرست حاصل شود) و در بقیهٔ موارد ارزش «$p \Rightarrow q$» درست است.

به‌ویژه وقتی که ارزش مقدمِ گزارهٔ شرطی یعنی p، نادرست باشد، همواره «$p \Rightarrow q$» دارای ارزش درست بوده و درست یا نادرست بودن q تأثیری در ارزش گزارهٔ «$p \Rightarrow q$» ندارد؛ بنابراین در هر یک از دو حالت مذکور، گزارهٔ شرطی **به انتفای مقدم** دارای ارزش درست است.

◆ **مثال:**

۱. گزاره‌های «اگر $۶=۳^۲$ آنگاه، ۵ اول است» و «اگر ۸ فرد است، آنگاه $۴<۲$» هر دو به انتفای مقدم درست هستند.

۲. گزارهٔ «اگر ۱۷ اول است آنگاه ۱۸ اول است» نادرست است.

۳. گزارهٔ «اگر $۴^۲=۲^۴$ آنگاه $۲^۳ < ۳^۲$» درست است.

تذکر : در تعیین ارزش گزاره‌های شرطی، در صورتی که ارزش تالی درست باشد، نمی‌توانیم ایرادی از کلّ گزارهٔ شرطی بگیریم؛ زیرا نتیجهٔ شرط، درست است و اگر از مقدم ایراد بگیریم، گوینده به راحتی می‌تواند با کلمه «اگر» که روی مقدم بیان می‌شود، ایراد را رفع کند! و چنانچه ارزش تالی نادرست باشد و مقدم نیز دارای ارزش نادرست باشد، درست بودن گزاره $p \Rightarrow q$ فاقد ایراد است. (از بیان گزاره‌ای نادرست به نتیجه‌ای نادرست رسیدن، عجیب نیست!)

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید :

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{۹}$ مربع کامل است.		
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.		
۴	اگر .....آنگاه		✓
۵	اگر ..... آنگاه	✓	
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۷	اگر ..... آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید :

۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$ (ارزش گزارهٔ $(q \Rightarrow p)$ به انتفای مقدم درست بوده و لذا ارزش گزارهٔ $(q \Rightarrow p) \wedge r$ به ارزش گزارهٔ r بستگی دارد.)

۲) $(p \vee q) \vee r$

۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$

۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$

۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$

۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

۴. **ترکیب دو شرطی :** هرگاه بخواهیم از گزارهٔ p، گزارهٔ q را نتیجه بگیریم و نیز از گزارهٔ q، گزارهٔ p را نتیجه بگیریم، از نماد «$\Leftrightarrow$» استفاده کرده و می‌نویسیم «$p \Leftrightarrow q$» و آن را به صورت‌های «p نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را»، «اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p»، «اگر p آنگاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی است برای q» و «p اگر و تنها اگر q» می‌خوانیم. در واقع گزارهٔ دو شرطی $(p \Leftrightarrow q)$ همان گزارهٔ $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ است.

تذکر : هم‌ارزش بودنِ دو گزارهٔ p و q را با نماد $p \equiv q$ نشان می‌دهیم؛ در این صورت :

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

بنابراین با توجه به ارزش گزاره‌های شرطی و عطفی ارزش گزاره‌های دو شرطی طبق جدول زیر به دست می‌آید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

همان‌طور که در ستون آخر مشاهده می‌کنید، اگر دو گزارهٔ p و q هم‌ارزش باشند؛ یعنی $p \equiv q$ (هر دو درست یا هر دو نادرست) در این صورت ارزش گزارهٔ دو شرطی $p \Leftrightarrow q$، درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است، آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.		
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		
۳	.....اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب است.	✓	
۴	اگر .....آنگاه ..... و برعکس		✓
۵	یک چهار ضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهار ضلعی لوزی باشد.		
۶	اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد؛ آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس		

کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید :

۱) $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$

۲) $(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$ چون $p \equiv q \sim$ پس $(\sim p \Leftrightarrow q) \equiv T$[1] و لذا ترکیب فصلی یک گزارهٔ درست با هر گزاره‌ای، دارای ارزش درست است.

۳) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

۴) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

۵) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

۶) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$

۷) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

◆ **مثال:** با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

پ) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

ت) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

ث) $(p \vee \sim p) \equiv T$ ، $(p \wedge \sim p) \equiv F$

الف)

p	q	$\sim p$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	.....
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	.....

ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	.....

۱ــ T ابتدای کلمهٔ True به معنی راست(درست) و F ابتدای کلمهٔ False به معنی دروغ(نادرست) است.

تذکر : گزارهٔ $(\sim p \Rightarrow \sim q)$ را عکس نقیض گزارهٔ $(p \Rightarrow q)$ می‌نامیم.

ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \vee q)$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	...	ن	...
د	ن	ن	...	د	...	...
ن	د	د	...	د	...	ن
ن	ن	د	...	...	د	...

تذکر : این قانون یا هم‌ارزی؛ یعنی $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ و مشابه آن؛ یعنی $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ به قوانین دمورگان معروف‌اند.

ت)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	...
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	...

ث)

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

تذکر : گزاره‌هایی نظیر $(p \vee \sim p)$ را گزاره‌هایی همیشه درست و $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می‌نامیم.

تمرین

۱. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزهٔ پیامبر اسلام ﷺ قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.		
۲	اگر ..... آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آنگاه		✓
۴	$۴^۳ > ۸^۲ \Rightarrow ۴^۳ = ۲ \times ۴$		
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.		
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.		
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		
۸	امام خمینی ﷺ در سال ۱۳۴۳ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.		
۹	حضرت علی ﷺ اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و	✓	
۱۰	اگر .....آنگاه ..... و برعکس	✓	

۲. اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هریک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید :

الف) $(p \vee r) \Rightarrow p$

ب) $(q \wedge r) \Rightarrow r$

پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$

ت) $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

ث) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

ج) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

چ) $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$

ح) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$

خ) $(r \Rightarrow p) \wedge p$

۳. درستی هریک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید :

الف) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

ب) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

پ) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ت) $(p \Rightarrow p) \equiv T$

ث) $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

ج) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

درس ۲

استدلال ریاضی

در درس گذشته با انواع گزاره‌ها و جدول ارزشی گزاره‌ها آشنا شدید. از طرفی در سال گذشته انواع استدلال‌های منطقی و قیاس‌ها را در کتاب منطق خود فراگرفتید. در این درس ابتدا به نحوهٔ تبدیل گزاره‌های توصیفی به نمادهای ریاضی و سپس با استفاده از قواعد و قضایای منطقی به استدلال ریاضی می‌پردازیم. در اینجا منظور از استدلال ریاضی استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره‌ها در حل مسائل و همچنین اثبات یا رد یک گزاره به کمک ریاضی است.

اولین گام برای استدلال ریاضی این است که یک عبارت توصیفی را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم. در ادامه با مثال‌هایی از تبدیل عبارت‌های توصیفی به زبان و نمادهای ریاضی آشنا می‌شوید.

مثال ۱ : سال گذشته با عبارت زیر آشنا شدید.

« ما و ما و نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می‌شویم».

اکنون عبارت فوق را به‌صورت نماد ریاضی بازنویسی می‌کنیم. کافی است به‌جای «ما» در ابتدای عبارت از x استفاده کنیم. در این صورت خواهیم داشت :

$$\underbrace{x+x}_{۲x}+\frac{۱}{۲}x+\underbrace{\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}x\right)}_{\frac{۱}{۴}x}+۱=۱۰۰ \longrightarrow ۲x+\frac{۳}{۴}x+۱=۱۰۰ \longrightarrow \frac{۱۱}{۴}x+۱=۱۰۰$$

بنابراین عبارت توصیفی فوق به‌صورت «$\frac{۱۱}{۴}x+۱=۱۰۰$ » بازنویسی شد که به‌وضوح یک معادلهٔ ریاضی است.

مثال ۲ : به عبارت زیر که عیناً از کتاب خلاصة الحساب تألیف شیخ‌بهایی، انتخاب شده است، توجه کنید :

عَدَدٌ ضُرِبَ فی نِصفِه وَزیدَ عَلَی الحاصِلِ اِثنا عَشَرَ حَصَلَ خَمسَةُ اَمثالِ العَدَدِ.

«عددی را در نصف خودش ضرب کردیم، آنگاه بر حاصل‌ضرب عدد ۱۲ را افزودیم. حاصل ۵ برابر عدد منظور شد».

برای تبدیل عبارت کلامی بالا به‌صورت نماد ریاضی، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

عدد منظور را x در نظر بگیرید. در نتیجه عبارت بالا به‌صورت زیر در خواهد آمد :

$$x\times\left(\frac{۱}{۲}x\right)+۱۲=۵x \quad \Rightarrow \frac{۱}{۲}x^{۲}+۱۲=۵x \Rightarrow \frac{۱}{۲}x^{۲}-۵x+۱۲=۰$$

عبارت فوق یک معادلهٔ درجه دوم است.

مثال ۳ : عبارت «ده درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن است.» را به‌صورت نماد ریاضی بیان می‌کنیم.
کافی است قیمت فروش این کالا را x و قیمت خرید آن را y درنظر بگیریم :

$$\frac{۱۰}{۱۰}x = x - y$$

کار در کلاس

عبارات زیر را به‌صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.
الف) عددی به‌علاوهٔ پنج، مساوی دو برابر آن عدد است.
ب) حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است.
پ) حاصل‌ضرب عددی در خودش به‌علاوهٔ ۳، بزرگ‌تر از خودش است.

خواندنی ۱

کورت گودل (Kurt Gödel) یک ریاضی‌دان برجستهٔ اتریشی است که در زمینهٔ منطق، به‌ویژه تبدیل عبارات به نماد ریاضی تلاش‌های بسیاری انجام داد. نتیجهٔ تحقیقات او در منطق ریاضی سبب پیدایش تحولات شگرفی در علم منطق به‌ویژه منطق ریاضی شد. قضایای معروف او موسوم به «قضایای ناتمامیت گودل» که در سال ۱۹۳۱ منتشر شدند فهم بشر را از تارسایی‌های موجود در **دستگاه‌های منطقی سازگار**[۱] دگرگون کرد. قضایای او به‌عنوان یکی از بزرگ‌ترین بحران‌های تاریخ ریاضیات شناخته می‌شوند. وی با تبدیل برخی گزاره‌ها به‌عبارات پیچیدهٔ ریاضی به کمک اعداد اول نشان داد که در هر نظریه منطقی سازگار که شامل حساب (اعداد طبیعی و عمل‌های جمع و ضرب) باشد و برخی قواعد مربوط به آن را اثبات کند، گزاره‌ای وجود دارد که (در آن نظریه) نه قابل اثبات است و نه قابل رد. گزاره‌ای که در یک نظریه نه قابل اثبات باشد و نه قابل رد، یک گزارهٔ **تعمیم ناپذیر** (در آن نظریه) گفته می‌شود. کارهای او از جمله «کد گذاری گودلی» بعدها به پرورش ایده‌هایی جهت استفاده در علوم رایانه و رمزنگاری کمک کرد. امروزه از تکنیک‌های مشابهی برای تولید بارکد محصولات استفاده می‌شود. در این بارکدها ابتدا یک عبارت توصیفی به‌عبارت ریاضی (معمولاً یک عدد) و سپس به یک شکل هندسی تبدیل می‌شود. نمونه‌ای از این بارکدها را در زیر می‌بینید. با استفاده از نرم‌افزارهای بارکدخوان عبارت متناظر با این بارکدها را بیابید.

۱ـ دستگاه (یا نظریه) منطقی مجموعه‌ای از اصول و قواعد منطقی است که درست پذیرفته می‌شوند. یک نظریهٔ منطقی را سازگار گوییم هرگاه در آن، دو گزارهٔ متناقض قابل اثبات نباشند.

در کتاب منطق با انواع قیاس‌ها آشنا شدید. قیاس‌ها ابزارهای مهمی در استدلال و به‌ویژه استدلال ریاضی هستند.

یکی از انواع قیاس‌ها که در استدلالات ریاضیاتی کاربرد فراوان دارد، «قیاس استثنایی» است. در زیر با ذکر مثالی از این نوع قیاس آن را یادآوری می‌کنیم.

مقدمه ۱ : اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

مقدمه ۲ : امشب، شب چهاردهم ماه است.

نتیجه : ماه کامل است.

استدلال بالا را می‌توان به‌طور کلی به شکل زیر صورت بندی کرد.

اگر الف آنگاه ب

الف

∴ ب

و یا با استفاده از نمادگذاری‌های درس قبل داریم :

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

که در اینجا سه نقطه ($\therefore$) نماد نتیجه است.

گاهی از این قیاس به شکل نادرست استفاده می‌شود و منجر به نتیجه‌گیری نادرست می‌شود. به این‌گونه استدلالات، مغالطه می‌گویند. در زیر به مثالی از این نوع پرداخته شده است.

مثال ۱ : اگر باران ببارد، زمین خیس می‌شود.

p — q

زمین خیس شده است.

---

q

$\therefore$ باران باریده است.

در استدلال فوق طبق قیاس استثنایی، مقدمه دوم باید p باشد و نه q، پس استدلال فوق نادرست است (زمین می‌تواند به دلیل دیگری غیر از باریدن باران خیس شده باشد).

با استفاده از نمادهای ریاضی و قواعد منطقی می‌توان مسائل زیادی را حل کرد. استفاده از نمادهای ریاضی اغلب باعث شفاف‌ترشدن مسئله و سهولت در به‌کارگیری قواعد منطقی می‌شود. در زیر به نمونه‌ای از استدلال ریاضی در حل مسائل پرداخته شده است.

کار در کلاس

۱. با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعدهٔ قیاس استثنایی $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ را نشان دهید.

۲. در هر یک از استدلال‌های زیر، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

p: $۳ > ۰ \Rightarrow ۴ > ۱$

p: $۳ > ۰$

$\therefore$ .....

خطوط $L_۱$ و $L_۲$ هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند : q ⇒ خطوط $L_۱$ و $L_۲$ موازی باشند :p

.....

$\therefore$ خطوط $L_۱$ و $L_۲$ هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

مثال ۲ : سه لیوان همانند شکل زیر داریم که یکی از آنها وارونه است. می‌خواهیم همهٔ آنها در حالت درست (رو به بالا) قرار گیرند؛ ولی مجاز هستیم تا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم (اگر وارونه است، آن را درست کنیم و برعکس). سؤال این است که آیا این کار امکان‌پذیر است؟ اگر بلی با چند حرکت مجاز؟ امتحان کنید!

پاسخ : به کمک یک استدلال سادهٔ ریاضی که در ادامه می‌آید، نشان می‌دهیم که این کار امکان‌پذیر نیست. برای این کار داریم :

تعداد لیوان‌های وارونه $= s$

وضعیت فعلی (یک لیوان وارونه است) : $s = ۱$

وضعیت مطلوب (هیچ لیوانی وارونه نباشد) : $s = ۰$

حرکت مجاز : در هر بار دقیقاً دو لیوان تغییر وضعیت دهد.

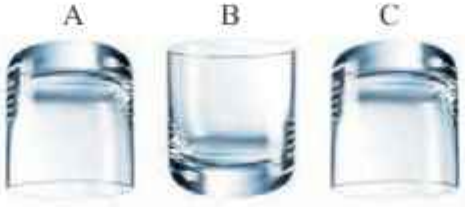
حالات ممکن در هر حرکت مجاز در حالت کلی

- $s - ۲$ ← تعداد لیوان‌های وارونه دو تا کم می‌شود ← دو لیوان درست می‌شود
- $s + ۲$ ← تعداد لیوان‌های وارونه دو تا اضافه می‌شود ← دو لیوان وارونه می‌شود
- $s + ۰$ ← یک لیوان درست و یک لیوان وارونه می‌شود

بنابراین s همیشه به اندازهٔ عددی زوج (یا ۲− یا ۲+ یا ۰) تغییر می‌یابد و هرگز از ۱ به ۰ کاهش نمی‌یابد.

کار در کلاس

۱. مثال سه لیوان را در حالت زیر بررسی کنید. آیا فقط یک راه حل دارد؟



۲. مثال سه لیوان را برای حالتی که بیش از ۳ لیوان داریم و تعداد فردی از لیوان‌ها را که وارونه هستند، بررسی کنید. آیا استدلال گفته شده در آنجا قابل تعمیم به حالت اخیر است؟

تذکر : در درس قبل دیدیم که دوگزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ هم ارزند. به عبارت دیگر اگر بخواهیم ثابت کنیم گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ درست است و این کار دشوار باشد، به جای آن می‌توان ثابت کرد $\sim q \Rightarrow \sim p$ درست است. در این حالت می‌گوییم عکس نقیض گزارهٔ اصلی را ثابت می‌کنیم.

مثال ۳ : ثابت کنید «اگر n^2 زوج باشد آنگاه n زوج است $(n \in Z)$.»

اگر فرض کنیم

p : n^2 زوج است

q: n زوج است

و بخواهیم از درستی گزارهٔ p به گزارهٔ q برسیم، مسیر اثبات دشوار است. برای این‌کار از عکس نقیض گزارهٔ $p \Rightarrow q$ یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ استفاده می‌کنیم. یعنی نشان می‌دهیم اگر n زوج نباشد (یعنی فرد باشد، چون حالت دیگری وجود ندارد)، آنگاه n^2 زوج نیست (یعنی n^2 فرد است).

$$n \text{ فرد است} \Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{m}) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 2m + 1$$

تساوی اخیر نشان می‌دهد که n^2 فرد است و لذا حکم به‌دست می‌آید.

گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار خطا می‌شویم. یافتن خطا در یک استدلال برای رفع ایراد آن بسیار مهم است. گاهی یک استدلال غلط برای سال‌ها درست پنداشته می‌شود تا اینکه دانشمندی به غلط بودن آن پی می‌برد. کشف محل اشکال در یک استدلال همواره ساده نیست و نیاز به مهارت و دقت دارد. به مثال‌های زیر دقت کنید.

مثال ۱ : دانش‌آموزی ادعا می‌کند که معادلهٔ $x^2 - x = 0$ تنها یک ریشه دارد و آن $x=1$ است. استدلال او در زیر آمده است.

۱) $x^2 - x = 0$

۲) $x(x-1) = 0$ تجزیهٔ معادله

۳) $\frac{x(x-1)}{x} = \frac{0}{x}$ تقسیم طرفین بر x و ساده‌سازی

۴) $x - 1 = 0$ حاصل ساده‌سازی و تبدیل به معادله ساده‌تر

۵) $x = 1$ جواب معادله

ایراد این استدلال در این است که در گام سوم اجازه تقسیم بر x وجود ندارد، چون x ممکن است صفر باشد و عبارت بی‌معنا می‌شود.

مثال ۲ : دانش‌آموزی گزارهٔ «$a < b \Rightarrow ac < bc$» را که a، b و c اعداد حقیقی‌اند، به‌صورت زیر ثابت کرده است. ایراد این استدلال را پیدا کنید.

۱) $a < b$

۲) $a + c < b + c$ طرفین را با c جمع می‌کنیم.

۳) $c(a+c) < c(b+c)$ طرفین نامساوی قبل را در c ضرب می‌کنیم.

۴) $ac + c^2 < bc + c^2$ c را در برانتزها ضرب می‌کنیم.

۵) $ac + \cancel{c^2} < bc + \cancel{c^2}$ چون c^2 عددی همواره مثبت است، می‌توان آن‌را از طرفین کم کرد.

۶) $ac < bc$

ایراد این استدلال در گام سوم است. چون علامت c معلوم نیست (ممکن است مثبت یا منفی باشد)؛ پس نمی‌توان آن‌را در طرفین نامساوی ضرب کرد. به‌عنوان مثال اگر $a=۱$ و $b=۲$ و $c=-۱$ باشد، آنگاه گزاره فوق معادل است با «$۱<۲ \Rightarrow -۱<-۲$» که آشکارا نادرست است.

کار در کلاس

سؤال زیر در یک امتحان ریاضی داده شده است.

«اگر $a=\frac{a-d}{c-d}$ آنگاه مطلوب است d. $(a\neq ۱)$.»

استدلال‌های زیر را برای به‌دست آوردن d از برگه‌های امتحانی دانش‌آموزان آورده‌ایم.

کدام یک از استدلال‌ها درست و کدام نادرست است؟ دلیل نادرستی هر استدلال غلط را بیان کنید.

الف)

۱) $a=\frac{a-d}{c-d}$

۲) $۰=\frac{-d}{c-d}$

۳) $d=۰$

ب)

۱) $a=\frac{a-d}{c-d}$

۲) $ac-ad=a-d$

۳) $ac-a=ad-d$

۴) $a(c-۱)=(a-۱)d$

۵) $\frac{a(c-۱)}{a-۱}=d$

۶) $-(c-۱)=d$

پ)

۱) $a=\frac{a-d}{c-d}$

۲) $a(c-d)=a-d$

۳) $ac-a=ad-d$

۴) $ac-a=(a-۱)d$

۵) $\frac{ac-a}{a-۱}=d$

تمرین

۱. گزاره‌های زیر را به‌صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به‌علاوهٔ پنج است.

پ) مجموع معکوس‌های دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

ت) مجموع مکعبات دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

ث) هر عدد ناصفری از معکوس خود بزرگ‌تر یا مساوی با آن است.

۲. در هر مورد گزاره‌ای همراه با یک استدلال نادرست برای آن داده شده است. دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

الف) اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم، آنگاه مساحت آن نیز دو برابر می‌شود.

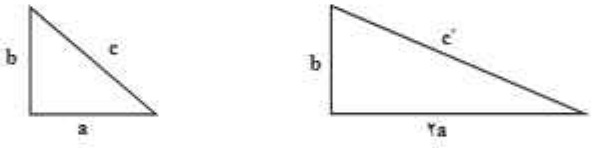
x : طول

y : عرض

$S = xy$ مساحت

$2(xy) = 2\underbrace{xy}_{S} = 2S \longrightarrow$ مساحت دو برابر شده است.

ب) در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه a و b و وتر c همانند شکل زیر اگر ضلع a را دو برابر کنیم، آنگاه وتر آن نیز دو برابر می‌شود.



استدلال : می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ بالا قضیهٔ فیثاغورث به‌صورت زیر برقرار است :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

اکنون این رابطه را برای مثلث قائم‌الزاویهٔ جدید نیز می‌نویسیم :

$$c'^2 = (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2 = 4(\underbrace{a^2 + b^2}_{c^2}) = 4c^2 \Longrightarrow c'^2 = 4c^2 \overset{\text{جذر}}{\Longrightarrow} c' = 2c$$

پس وتر دو برابر شده است.

پ) تساوی $\sqrt{\frac{12\times3 + 4\times16}{6}} = 2\sqrt{11}$ برقرار است.

$$\sqrt{\frac{12\times3 + 4\times16}{6}} = \sqrt{\frac{12\times3 + 4\times16}{2\times3}} = \sqrt{\frac{12 + \overset{2}{\cancel{4}}\times16}{2}} = \sqrt{12 + 32} = \sqrt{44} = \sqrt{4\times11} = 2\sqrt{11}$$

خواندنی

بهاءالدین محمدبن حسین عاملی معروف به شیخ بهایی در ذیحجهٔ ۹۵۳ هجری قمری (برابر با پنجشنبه ۸ اسفند ۹۲۵ خورشیدی، و ۲۷ فوریهٔ ۱۵۴۷) در **بعلبک**، به دنیا آمد و در شوال ۱۰۳۰ هجری قمری (۸ شهریور ۱۰۰۰ خورشیدی، و ۳۰ اوت ۱۶۲۱) دار فانی را در **اصفهان** وداع گفت.

شیخ بهایی حکیم، فقیه، عارف، منجم، ریاضی‌دان، شاعر، ادیب، مورخ و دانشمند نامدار قرن دهم و یازدهم هجری است که در دانش‌های **فلسفه، منطق، هیئت و ریاضیات** تبحر داشت. حدود ۹۵ کتاب و رساله از او در **سیاست، حدیث، ریاضی، اخلاق، نجوم، عرفان، فقه، مهندسی و هنر و فیزیک** بر جای مانده است. به پاس خدماتی که وی به علم **ستاره‌شناسی** کرده است، **یونسکو** در سال ۲۰۰۹ که مصادف با سال نجومی بوده نام وی را در **فهرست مفاخر ایران** ثبت کرد.

شخصیت علمی و ادبی و اخلاق او باعث شد تا در ۴۳ سالگی شیخ‌الاسلام **اصفهان** شود و در پی انتقال پایتخت از **قزوین** به **اصفهان** (در ۱۰۰۶ قمری)، از ۵۳ سالگی تا آخر عمر (۷۵ سالگی) منصب شیخ‌الاسلامی **پایتخت صفوی** را در دربار مقتدرترین شاه صفوی، **شاه عباس بزرگ** بر عهده داشته باشد.

مهارت وی در ریاضی، معماری و مهندسی معروف بوده و از مهم‌ترین خدمات شیخ بهایی در رونق بخشیدن به شهر اصفهان، تعیین سمت قبلهٔ **مسجد شاه اصفهان** است. این قبله‌یابی که با استفاده از ابزارهای آن زمان صورت پذیرفته، هفت درجه با جهت واقعی قبله اختلاف دارد. تقسیم آب زاینده رود به محلات اصفهان و روستاهای مجاور رودخانه، ساخت گلخن گرمابه‌ای که هنوز در اصفهان معروف به حمام شیخ‌بهایی است و طراحی منارجنبان اصفهان که هم‌اکنون نیز پا برجاست، به او نسبت داده می‌شود. همچنین طرح‌ریزی کاریز نجف‌آباد ــ اصفهان است که به نام قنات زرین کمر، (یکی از بزرگ‌ترین کاریزهای ایران) و معماری **مسجد شاه اصفهان** و مهندسی حصار نجف و شاخص تعیین اوقات شرعی (ساعت آفتابی در مغرب **مسجد شاه**) را به او نسبت می‌دهند.

خواندنی : منطق فازی و کاربردها

در این فصل آموختید که هر گزاره یا درست است و یا نادرست. سپس براساس قواعد منطق و دانستن ارزش گزاره‌ها (اعم از ساده و ترکیبی) به استدلال ریاضی پرداختید. در زندگی روزمره معمولاً هدف از استدلال کشف ارزش یک گزاره و سپس تصمیم‌گیری است. مثلاً طبق قانون کار اگر دمای هوا ۵۰ درجه سانتی‌گراد یا بیشتر باشد مدارس، بانک‌ها و برخی از شرکت‌ها و ادارات تعطیل می‌شوند. اکنون ارزش گزاره «فردا دمای هوا ۵۰ درجه است» بسیار مهم می‌باشد چرا که مستقیماً بر تصمیم مدیران برای تعطیل کردن اداره متبوع خود تأثیر می‌گذارد. به‌هرحال با رجوع به پیش‌بینی‌های رسمی هواشناسی درستی یا نادرستی این گزاره قابل حصول است. اما تصمیم‌گیری همیشه به این آسانی نیست. در واقع همواره می‌توان موقعیت‌هایی را تجسم کرد که در آن باید ارزش یک عبارت را جهت تصمیم‌گیری تعیین کنیم که آن عبارت یک گزاره (به معنایی که در درس اول خواندید) نیست. مثلاً می‌دانیم اگر هوا سرد باشد باید لباس گرم بپوشیم. اکنون درباره ارزش عبارت «فردا هوا سرد است» چگونه می‌توان داوری کرد؟! از آنجا که «سرد» بودن یک صفت کیفی است می‌دانیم که این عبارت

یک گزاره نیست. اما بالاخره باید تکلیف خود را با پوشیدن یا نپوشیدن لباس گرم مشخص کنیم و این یعنی باید به نوعی برای عبارت فوق ارزش‌گذاری صورت گیرد. موقعیت‌های تصمیم‌گیری بسیار زیادی در زندگی انسانی به‌وجود می‌آید که باید دربارهٔ ارزش عباراتی مشابه فوق داوری کنیم. مثلاً در یک کتاب آشپزی نوشته می‌شود «نمک به مقدار لازم اضافه کنید». اکنون اگر بخواهید برای یک میهمانی مهم آشپزی کنید تصمیم‌گیری برای اینکه چقدر نمک به غذا اضافه کنید را چگونه انجام می‌دهید؟ معمولاً انسان‌ها در چنین مواقعی به‌طور تقریبی و با حدس و آزمایش و استفاده از تجربیات گذشتهٔ خود به نوعی از ارزش‌گذاری و تصمیم‌گیری دست می‌زنند. بدیهی است که این ارزش‌گذاری‌ها همیشه با خطر خطا بودن همراه هستند. اکنون فرض کنید که بخواهیم یک روبات آشپز طراحی کنیم. به‌نظر شما چگونه باید ذهن و ساختار منطقی این روبات را برای تصمیمات این‌چنینی آماده کرد؟ اکنون روبات‌های دیگری را در نظر بگیرید که باید مانند یک انسان در خصوص مسائل مشابهی مثل گرما و سرمای هوای اتاق، خوب بودن هوای شهر، خوش بو بودن عطر و... تصمیم‌گیری کنند. در همهٔ این مواقع ما با صفات کیفی روبه‌رو هستیم.

به‌نظر می‌رسد در این مواقع، دیگر منطق گزاره‌ها که مبتنی بر دو ارزش درست یا نادرست (معادل ۰ یا ۱) می‌باشد راه‌گشا نیست. منطق‌دانان به کمک ریاضی‌دانان برای سال‌های متمادی بر روی ارزش‌گذاری و تصمیم‌گیری در چنین مواقعی که عبارت‌ها مبهم و داده‌ها ناقص هستند پژوهش کرده‌اند که منجر به پیدایش «*منطق‌های چند ارزشی*[1]» شد. در سال ۱۹۶۵ میلادی یک دانشمند ایرانی به‌نام لطفی علی عسکرزاده (معروف به زاده) نوعی از منطق چند ارزشی به‌نام «*منطق فازی*[2]» را بنیان نهاد که بسیار پرکاربرد شد. براساس این منطق، هر عبارت نه تنها یکی از دو ارزش ۰ یا ۱ بلکه هر عدد

حقیقی بین این دو عدد را می‌تواند اختیار کند. در واقع او با این کار مفهوم درستی یک گزاره را یک طیف در نظر گرفت که می‌تواند دارای درجات متفاوتی باشد. مثلاً در نوار زیر کدام نقطه محل رنگ آبی را مشخص می‌کند؟ آیا فقط یک نقطه وجود دارد؟ رنگ‌های متناظر با این نقاط چه تفاوتی با هم دارند؟

مفهوم درجهٔ درستی از آنجا ناشی می‌شود که در زندگی روزمره به‌ندرت می‌توان با قاطعیت در مورد درستی یا نادرستی یک عبارت تصمیم گرفت بلکه همواره باید از میزان درستی عبارات که در بطن خود نوعی مفهوم احتمالی دارند سخن گفت. منطق فازی یکی از اصلی‌ترین ابزارها در توسعه هوش مصنوعی است که اساس طراحی روبات‌ها می‌باشد. به کمک منطق فازی می‌توان روبات‌هایی را طراحی کرد که همانند انسان قابلیت یادگیری و کسب تجربه در طول زمان و استفاده از تجربیات خود در تصمیم‌گیری‌ها را داشته باشند.

خودرو هوشمند مجهز به راننده اتوماتیک مبتنی بر منطق فازی

بلوزهای هوشمند مبتنی بر منطق فازی به‌طور اتوماتیک زمان و دمای لازم برای پخت را تنظیم می‌کند

ماشین‌لباسشویی هوشمند مبتنی بر منطق فازی

سیستم‌های ناوبری هوشمند در صنایع ریلی بسیار پرکاربرد هستند

۱ــ Multi - Valued Logics

۲ــ Fuzzy Logic

فصل ۲ـ تابع

درس ۱ توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی

درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلقی

درس ۳ اعمال بر روی توابع

اجرای طرح کانال اتصال زرینه‌رود به سیمینه‌رود / احیای دریاچه ارومیه

عکس: بیژن شیخ علیزاده

درس ۱

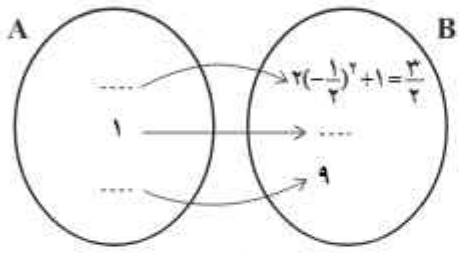
توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی

در سال گذشته با مفاهیم تابع، دامنه و برد آشنا شدیم.

فعالیت

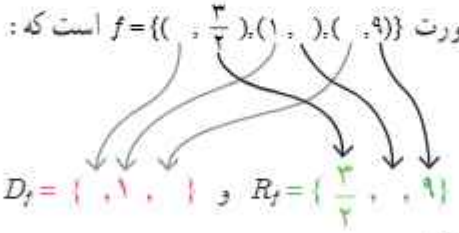
اگر $A=\{-\frac{۱}{۲}, ۱, ۲\}$ و $\begin{cases} f: A \to B \\ f(x)=۲x^۲+۱ \end{cases}$ باشد، با توجه به نمایش‌های خوانده‌شده در سال قبل برای بیان یک رابطه :

الف. در نمایش پیکانی با توجه به ضابطهٔ f و مجموعهٔ A، داریم :



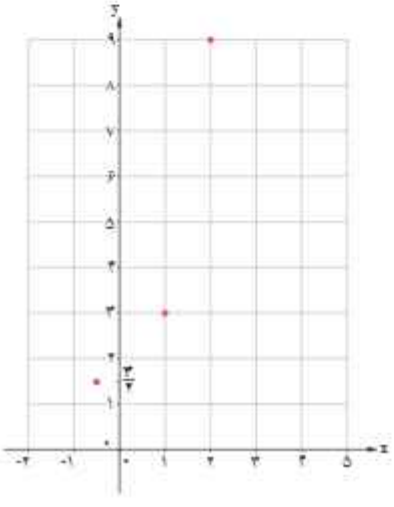
بنابراین برد f مجموعهٔ { , , } = B است. نمایش پیکانی رابطهٔ فوق بیانگر یک تابع است؛ زیرا از هر عضو مجموعهٔ A، دقیقاً ..... خارج شده است.

ب. نمایش زوج‌مرتبی مثال بالا به‌صورت $f=\{(۹, \quad), (\quad, ۱), (\quad, \frac{۳}{۲})\}$ است که :



$D_f = \{ , ۱, \}$ و $R_f = \{ \frac{۳}{۲}, , ۹\}$

مجموعه‌های دامنه و برد تابع f را تشکیل می‌دهند.



ج. نمایش مختصاتی آن نیز چنین است : تصویر این نقاط بر روی محور xها؛ یعنی { , ۱, } دامنهٔ تابع و تصویر همین نقاط بر روی محور yها { ۹, , $\frac{۳}{۲}$ } برد تابع نامیده می‌شود.

کار در کلاس

ابتدا با پیکان‌های مناسب رابطهٔ خواسته‌شده را کامل کنید.

۱. رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد.

الف

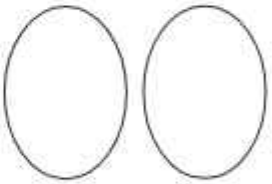
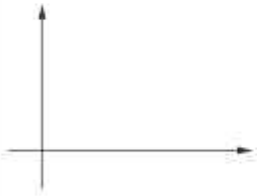
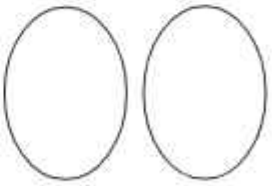
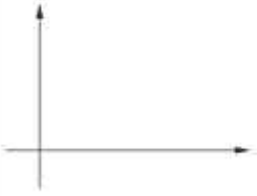
ب

۲. رابطه‌ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد.

الف

ب

حال جدول زیر را با توجه به رابطه‌هایی که در قسمت ۱ و ۲ «تابع» هستند، کامل کنید.

	نمایش پیکانی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی
۱		{(,),(,),(,)}	
۲		{(,),(,),(,)}	

با توجه به جدول بالا :

الف. نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که .....

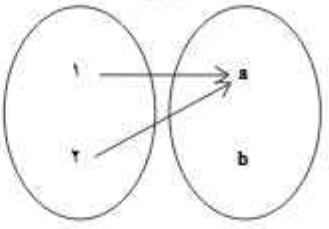
ب. نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که .....

ج. نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که .....

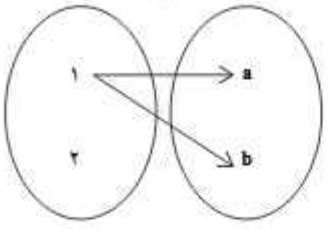
تمرین

۱. کدام‌یک از رابطه‌های زیر که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع نیست؟ چرا؟

الف

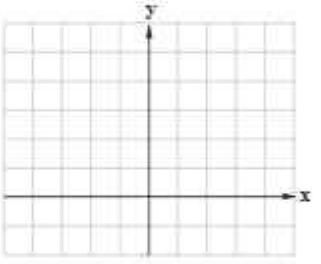


ب



۲. کامل کنید :

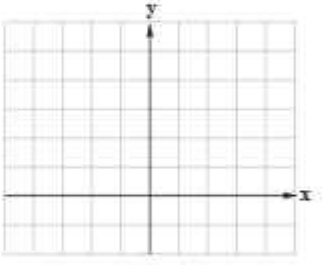
$\begin{cases} f: A \to B \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases}$ $D_f = A = \{2, -1, -2\}$ $R_f = \{\ ,\ ,\ \}$



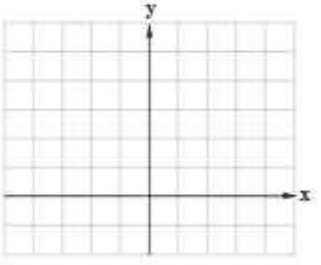
---

f تابعی خطی از A به B $D_f = \{-\frac{1}{2}, 0, 2\}$ $R_f = \{-\frac{3}{2}, 0, 6\}$

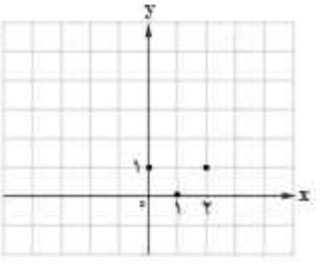
$f(x) =$



$\begin{cases} f: A \to B \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ $D_f = \{\ ,\ ,\ \}$ $R_f = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$



$\begin{cases} f: A \to B \\ f(x) = (x-1)^2 \end{cases}$ $D_f = \{\ ,\ ,\ \}$ $R_f = \{\ ,\ \}$



انواع توابع (ثابت، چندضابطه‌ای و همانی)

یکی از کاربردهای تابع، «مدل‌سازی مسائل واقعی» است. به مثال زیر توجه کنید :

مدیران یک فروشگاه به دلایلی* تصمیم گرفته‌اند هزینهٔ استفاده از توقفگاه فروشگاه را برای مشتریان خود به‌صورت هوشمند تعیین کنند. پیش از این، هزینهٔ استفاده از توقفگاه ثابت بوده است (مستقل از ساعت و روز هفته).

برای اجرای این تصمیم ابتدا به کمک دوربین‌های مداربسته، در ورودی توقفگاه و به کمک «روش مشاهده» تعداد خودروهای ورودی در سومین هفتهٔ هر فصل شمارش شده است. با توجه به نبود دادهٔ دورافتاده، برای تعیین تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت از روزهای کاری فروشگاه از شاخص آماری میانگین استفاده شده است. این اطلاعات در جدول ۱ نمایش داده شده است :

جدول ۱. میانگین ورود خودرو به توقفگاه در هر ساعت کاری فروشگاه

روز هفته	نخستین ساعت (۹ـ۸)	دومین ساعت (۱۰ـ۹)	سومین ساعت (۱۱ـ۱۰)	چهارمین ساعت (۱۲ـ۱۱)	پنجمین ساعت (۱۳ـ۱۲)	ششمین ساعت (۱۴ـ۱۳)	هفتمین ساعت (۱۵ـ۱۴)	هشتمین ساعت (۱۶ـ۱۵)	نهمین ساعت (۱۷ـ۱۶)	دهمین ساعت (۱۸ـ۱۷)	یازدهمین ساعت (۱۹ـ۱۸)	دوازدهمین ساعت (۲۰ـ۱۹)
شنبه	۳۰	۴۰	۵۰	۴۰	۵۰	۴۰	۳۰	۳۰	۵۰	۵۰	۵۰	۶۰
یک‌شنبه	۱۱۰	۱۳۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۷۰	۱۶۰
دوشنبه	۲۱۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۳۰	۲۵۰
سه‌شنبه	۱۲۰	۱۱۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۳۲۰	۳۴۰	۳۴۰	۳۶۰
چهارشنبه	۳۰	۴۰	۹۰	۹۰	۶۰	۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۵۰	۴۹۰	۵۷۰	۶۸۰
پنج‌شنبه	۲۰	۱۲۰	۲۳۰	۳۴۰	۴۱۰	۵۱۰	۶۱۰	۷۲۰	۸۹۰	۹۳۰	۱۰۷۰	۱۱۲۰
جمعه	۱۲۰	۲۱۰	۳۴۰	۴۲۰	۵۱۰	۶۲۰	۷۱۰	۸۲۰	۹۴۰	۱۰۹۰	۵۲۰	۴۱۰

با در نظر گرفتن جدول ۱، هزینهٔ توقفگاه از روز **شنبه تا چهارشنبه** مطابق جدول ۲ تعیین شده است :

جدول ۲. هزینهٔ توقفگاه با توجه به میانگین خودروهای ورودی

میانگین خودروهای ورودی در هر ساعت	هزینهٔ دریافتی از هر خودرو (تومان)
۰ـ۱۰۰	(رایگان)
۱۰۰ـ۲۰۰	۵۰۰ تومان
۲۰۰ـ۳۰۰	۱۰۰۰ تومان
۳۰۰ـ۴۰۰	۱۵۰۰ تومان
۴۰۰ـ۵۰۰	۲۰۰۰ تومان
۵۰۰ـ۶۰۰	۲۵۰۰ تومان
۶۰۰ـ۷۰۰	۳۰۰۰ تومان

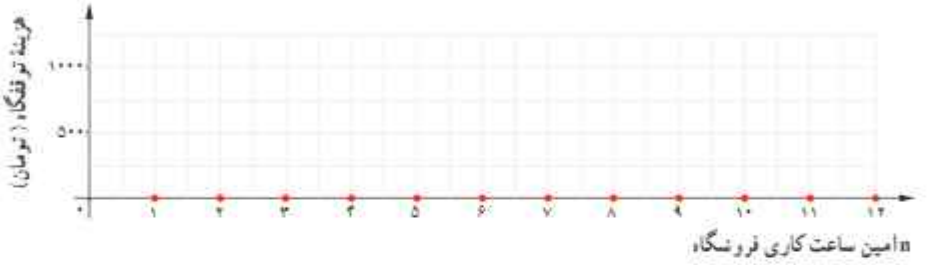
---

* ۱. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان فروشگاه فراوان نیست، هزینهٔ اندک توقفگاه می‌تواند تشویقی برای خرید از فروشگاه نزد مشتریان باشد.
۲. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان فروشگاه فراوان است، هزینهٔ بالاتر استفاده از توقفگاه درآمد بیشتری را برای فروشگاه فراهم می‌کند.
۳. در زمان‌هایی که‌تعداد مشتریان از ظرفیت پذیرش فروشگاه بیشتر است و این مسئله باعث تعجیل مشتریان در خرید از فروشگاه می‌شود، سوق دادن بخشی از این مشتریان به ساعت‌های خلوت فروشگاه به دلیل هزینهٔ رایگان یا اندک توقفگاه می‌تواند در افزایش درآمد فروشگاه بسیار تأثیرگذار باشد. به بیان دیگر نه‌تنها هزینهٔ متغیر توقفگاه به‌تنهایی می‌تواند درآمد فروشگاه را ارتقا بخشد، بلکه این مسئله بر میزان خرید مشتریان از فروشگاه نیز تأثیرگذار است که نتیجهٔ آن سود بیشتر فروشگاه خواهد بود.

تابع ثابت (Constant Function)

بر اساس اطلاعات آماری جدول ۱ و ۲، نمودار «nامین ساعت کاری فروشگاه ــ هزینهٔ دریافتی» را برای روزهای شنبه تا چهارشنبه در نخستین هفتهٔ هوشمندسازی رسم می‌کنیم.[۱]

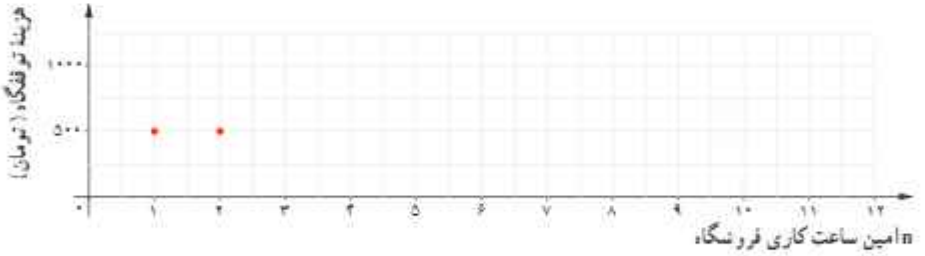
شنبه : در نخستین روز هفته تعداد خودروهای ورودی به توقفگاه همواره در دستهٔ ۱۰۰ــ۰ قرار می‌گیرند. بنابراین مطابق جدول دو، نمودار زیر به‌دست می‌آید :



این نوع تابع که به ازای $n=1$ تا $n=12$؛ یعنی در تمام ۱۲ ساعت کاری فروشگاه، مقدار ثابت صفر را اختیار کرده است، تابع ثابت نامیده می‌شود. پس ضابطهٔ تابع «هزینهٔ توقفگاه» در این روز به‌صورت $\begin{cases} C:A\to B \\ C(n)=0 \end{cases}$ است که در آن $D=\{n\in N \mid 1\le n\le 12\}$ دامنهٔ تابع و $R=\{0\}$ برد تابع C را تشکیل می‌دهند.

کار در کلاس

یکشنبه : با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینهٔ دریافتی مطابق جدول ۲، نمودار زیر را کامل کنید.



تابع $\begin{cases} f:A\to B \\ f(x)=c \end{cases}$ را که در آن مجموعه $R=\{c\}$ برد تابع است، تابع ثابت می‌نامند. در تابع ثابت، برد تابع تنها شامل یک عضو است.

---

۱. با توجه به آنکه مدت زمانی طول می‌کشد تا مشتریان فروشگاه از نرخ جدید هزینهٔ توقفگاه آگاهی یابند، در نخستین هفتهٔ هوشمندسازی توقفگاه، میانگین ورودی خودرو تغییر محسوسی نکرده است و اطلاعات جدول ۱ در این هفته معتبر است.

فعالیت

دوشنبه : با استفاده از جدول ۱ و ۲ همانند روزهای شنبه و یک‌شنبه، نمودار زیر را برای روز دوشنبه کامل کنید و دامنه و برد و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.

توجه داشته باشید که در این نمودار محور x برخلاف روزهای شنبه و یک‌شنبه بیانگر زمان ورود خودرو به توقفگاه است.

$$\begin{cases} C : A \to B \\ C(x) = \end{cases} \qquad D = \{x \in R \mid \quad\} \qquad R = \{\quad\}$$

ــ دامنهٔ نمودار در روز دوشنبه چه تفاوتی با دامنه نمودار در روزهای شنبه و یک‌شنبه دارد؟

ــ تفاوت این دامنه‌ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

تابع چندضابطه‌ای (Piecewise Function)

سه‌شنبه : با بررسی جدول ۱ تعداد خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری فروشگاه تا هشتمین ساعت کاری در دستهٔ ۲۰۰ـ۱۰۰ و در چهار ساعت پایانی ساعت کاری فروشگاه در دستهٔ ۴۰۰ـ۳۰۰ قرار می‌گیرد. با در نظر گرفتن جدول ۲، هزینهٔ استفاده از توقفگاه برای خودروها در این روز از این تابع پیروی می‌کند :

$$C(n) = \begin{cases} ۵۰۰ & ۱ \le n \le ۸ \qquad (۱) \\ ۱۵۰۰ & ۹ \le n \le ۱۲ \qquad (۲) \end{cases}$$

که ضابطهٔ ۱ مربوط به ساعت ورودی اول تا هشتم و ضابطهٔ ۲ مربوط به ساعت ورودی نهم تا دوازدهم است و نمودار آن :

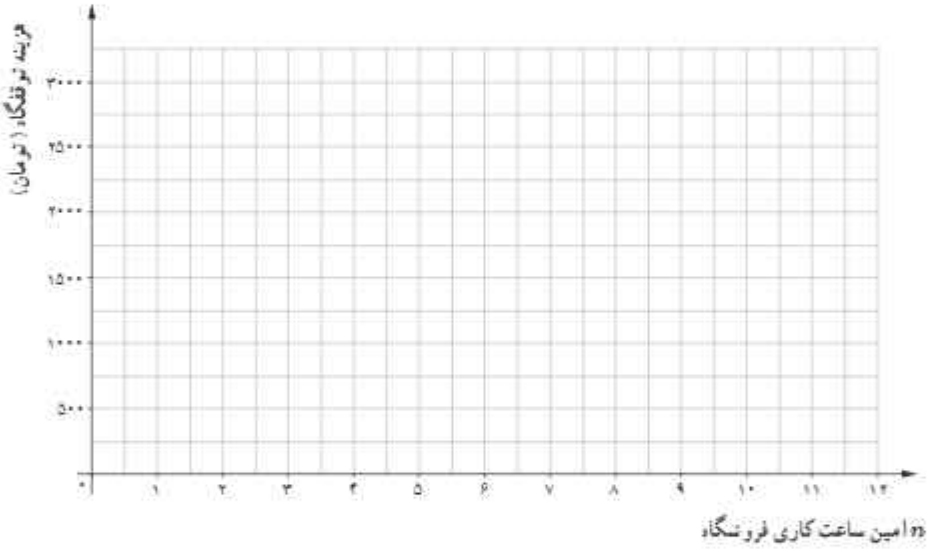
توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارند، توابع چندضابطه‌ای نامیده می‌شوند؛ مثلاً اگر یک تابع از دو ضابطه پیروی کند، یک تابع دوضابطه‌ای نامیده می‌شود.

کار در کلاس

چهارشنبه : در این روز با توجه به جدول ۱ و ۲ ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر مشخص می‌شود :

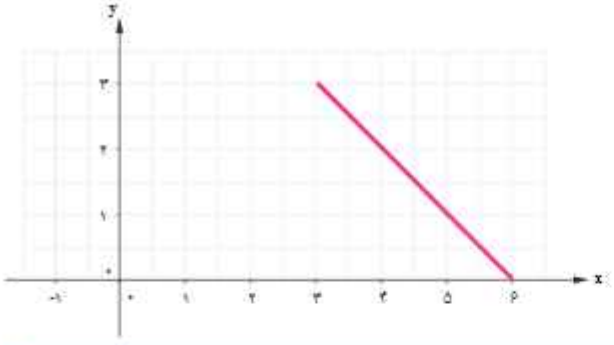
$$C(n)=\begin{cases}۰ & ۱\le n\le ۶\\ ۵۰۰ & n=۷\\ ۱۰۰۰ & n=۸\\ ۱۵۰۰ & n=۹\\ ۲۰۰۰ & n=۱۰\\ ۲۵۰۰ & n=۱۱\\ ۳۰۰۰ & n=۱۲\end{cases} \Leftrightarrow C(n)=\begin{cases}۰ & ۱\le n\le ۶\\ (n-۶)\times ۵۰۰ & ۷\le n\le ۱۲\end{cases}$$

۱. نمودار این تابع را رسم کنید :



۲. درآمد توقفگاه فروشگاه در این روز چقدر است؟

کار در کلاس



ضابطهٔ تابع و نمودار آن را کامل کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\le x<3 \\ \dots & 3\le x\le 6 \end{cases}$$

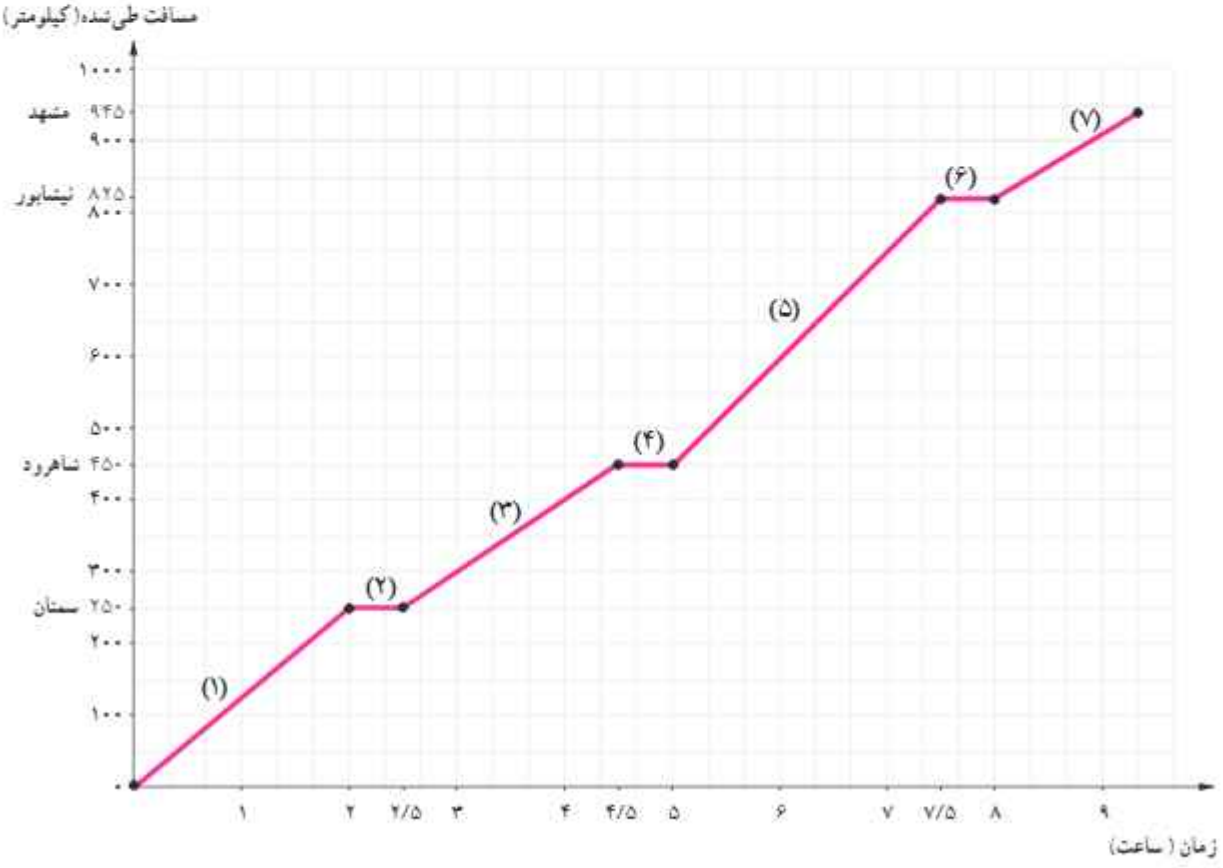
فعالیت

نمودار زیر قطاری را نشان می‌دهد که از تهران به مشهد رفته است.

۱. مفهوم قسمت‌هایی که نمودار تابع ثابت است چیست؟

۲. ضابطهٔ تابع «مکان ــ زمان» قطار از لحظه رسیدن به شاهرود تا لحظه ترک نیشابور را به‌دست آورید.

۳. اگر قطار مطابق ضابطه بخش ۵ و بدون توقف در نیشابور به مسیر خود ادامه دهد، در چه زمانی به مشهد می‌رسد؟

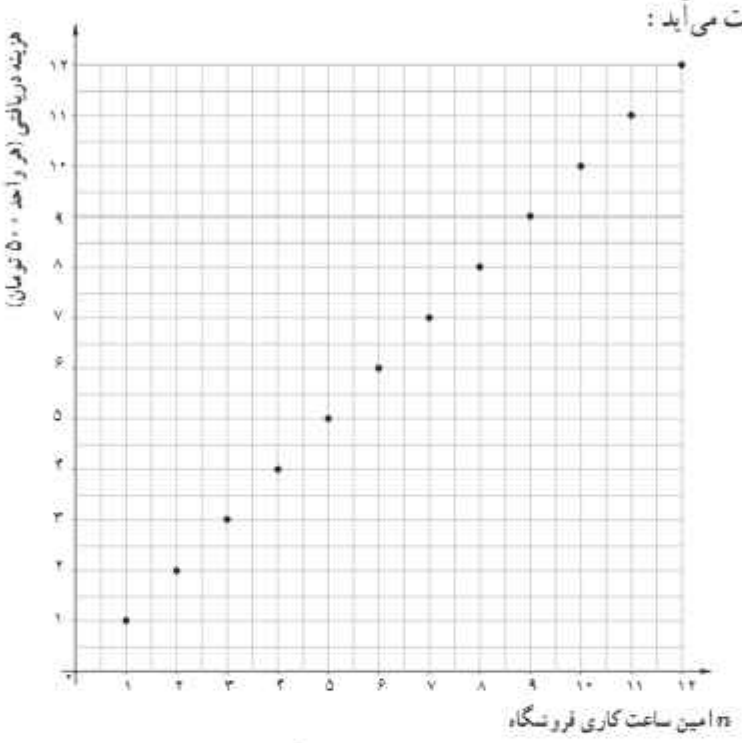


تابع همانی (Identity Function)

فعالیت

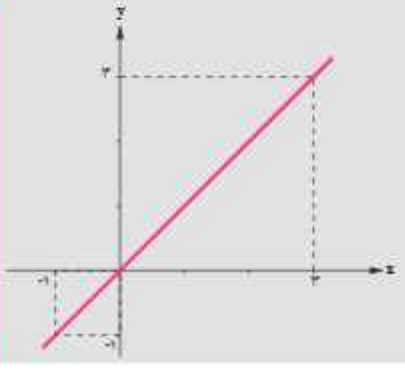
پنج‌شنبه : به‌دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری تا دوازدهمین ساعت کاری فروشگاه، مدیران شرکت تصمیم گرفته‌اند که از یک مدل «تابع خطی» برای دریافت هزینه از خودروها استفاده کنند. به این معنا که اگر خودرو در nامین ساعت کاری وارد توقفگاه شود، هزینهٔ دریافتی n واحد (هر واحد ۵۰۰ تومان) باشد.

بنابراین نمودار زیر به‌دست می‌آید :



مجموعه نقاط نمودار را به‌صورت زوج‌مرتب نشان دهید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. چه رابطه‌ای میان دامنه و برد این تابع برقرار است؟ آیا می‌توانید ضابطهٔ این تابع را حدس بزنید؟

اگر این مجموعه نقاط را در نمودار به یکدیگر وصل کنیم، این نمودار بیانگر چه مفهومی است؟ در این حالت دامنه و برد آن چه تغییری می‌کند؟



تابع با ضابطهٔ $f(x) = x$ را تابع همانی می‌نامند. با توجه به ضابطهٔ تابع، در تابع همانی دامنه و برد همواره با یکدیگر برابرند. از لحاظ هندسی نمودار این تابع نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است.

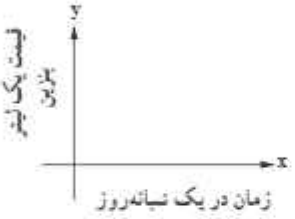
$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$

تمرین

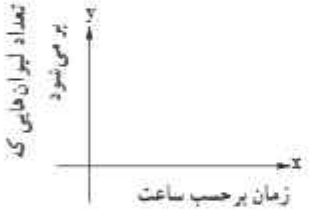
۱. با توجه به معرفی محور x و y در هر دستگاه مختصات، با هرکدام از توضیحات زیر کدام‌یک از توابع ثابت، چند ضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شود؟ نمودار هر حالت را با توجه به توضیحات کامل کنید.

الف. به مناسبت روز درخت‌کاری، هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد.

ب. هزینهٔ یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز در یک پمپ بنزین ۱۰۰۰ تومان است.

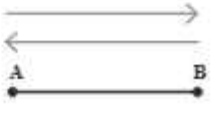


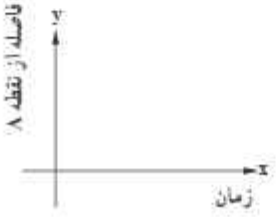
ج. شیر آبی که خراب است و در هر یک ساعت یک لیوان آب از آن چکه می‌کند.



د. بلیت یک سینما در سه سانس اول ۲۰۰۰ تومان، در چهار سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است.

هـ. متحرکی با سرعت ثابت از نقطهٔ A تا نقطهٔ B حرکت می‌کند و دوباره به نقطهٔ A برمی‌گردد.





۲. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟ چرا؟

الف. اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است.

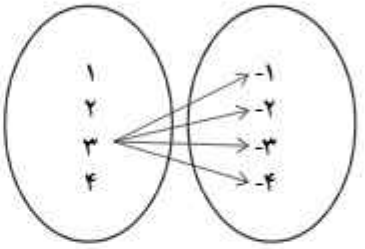
ب. اگر دامنهٔ یک تابع همانی مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه حاصل $f(x)+f(-x)$ همواره برابر صفر است.

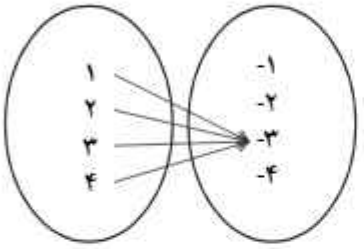
ج. اگر f یک تابع ثابت باشد، آن‌گاه $f(kx)=kf(x)$.

۳. اگر $A=\{(۲,b),(a,۴),(۷,a+b)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار a کدام است؟

۴. اگر $A=\{(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲),(x_۳,y_۳)\}$ یک تابع ثابت باشد، میانگین، میانه و واریانس مقادیر $y_۱,y_۲,y_۳$ را به‌دست آورید.

۵. کدام‌یک از نمایش‌های پیکانی زیر یک تابع ثابت را معرفی می‌کند؟





۶. در تابع ثابت $f(x)=c$:

الف. مقادیر $f(a)$ ، $f(b)$ و $f(a+b)$ را مشخص کنید.

ب. اگر در این تابع $f(a+b)=f(a)\times f(b)$ باشد، c چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

۷. اگر $A=\{(a,۱),(b,۲),(c,۵)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a و b و c را به‌دست آورید.

۸. در هر یک از زوج‌مرتب‌های زیر $n\in\mathbb{N}$ را به‌گونه‌ای تعیین کنید که زوج‌مرتب داده‌شده روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم باشد.

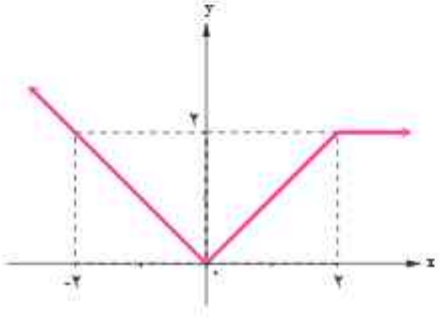
$(۲,n^۲-۳n+۴)$

$(-۱,n^۲-۴n+۲)$

۹. اگر f یک تابع ثابت با دامنهٔ دو عضوی و $n\in\mathbb{N}$ و m باشد، مقدار $m+t$ را به‌دست آورید.

$$f=\{(-۱,n^۲-۲n),(m-۴,۳),(m+n,t)\}$$

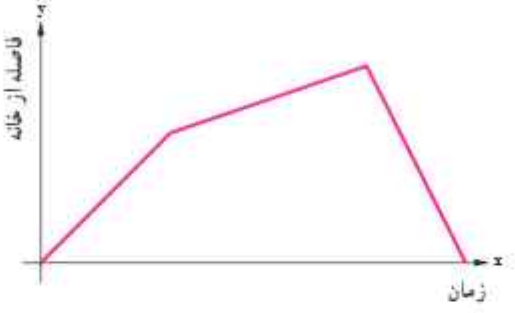
۱۰. ضابطهٔ تابع زیر را مشخص کنید.



۱۱. در تابع $f(x)=\begin{cases} x & x<-۱ \\ x^۲ & -۱\le x\le ۲ \\ ۵ & x>۲ \end{cases}$ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$f(۲)$ $\quad f(۳)+f(-۱)$ $\quad f(-\sqrt{۲})+f(\sqrt{۳})$ $\quad f(\sqrt{۲})+f(۵)$

۱۲. نمودار زیر به کدام داستان مربوط است؟



الف. آوا و مادربزرگش برای قدم زدن در بوستان، از خانه خارج شدند. آنها در ابتدا آهسته قدم می‌زدند و سپس سرعتشان را بیشتر کردند تا به بوستان رسیدند. سپس، از مسیری که آمده بودند، برگشتند و به خانه رسیدند.

ب. علی با دوچرخه‌اش از خانه به سمت بالای تپه روبه‌روی خانه‌شان حرکت کرد. پس از مدتی شیب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر به پایین تپه سرازیر شد.

ج. محمدرضا برای دویدن روزانه‌اش از خانه خارج شد. هنگام دویدن با دوست خود که در حال دویدن بود، برخورد کرد که باعث شد از سرعت دویدنش کم شود؛ اما بعد از آن با سرعت بیشتری به سمت خانه حرکت کرد و به خانه رسید.

۱۳. اگر هزینهٔ توقفگاه در روز جمعه بر اساس مدت زمان سپری شده از بازگشایی فروشگاه از ساعت ۸ صبح از تابع

$$C(x)=\begin{cases} ۱ & ۰\le x<۲ \\ x+۱ & ۲\le x<۱۰ \\ ۰ & ۱۰\le x\le ۱۲ \end{cases}$$

پیروی کند، با رسم نمودار تابع، هزینهٔ توقفگاه هر خودرو را با توجه به ساعت و زمان ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد بر روی محور yها معادل ۵۰۰ تومان است).

* ۱۴. درآمد فروشگاه از توقفگاه را از روز شنبه تا چهارشنبه در دو حالت زیر مقایسه کنید.

الف. قبل از هوشمندسازی و بر اساس هزینهٔ ثابت ۷۰۰ تومان برای هر خودرو که مستقل از روز و ساعت ورود به توقفگاه است.

ب. بر اساس هوشمندسازی

در هر دو حالت از اطلاعات جدول ۱ استفاده کنید.

حل تمرین* دار اجباری نیست.

درس ۲

توابع پلکانی و قدرمطلقی

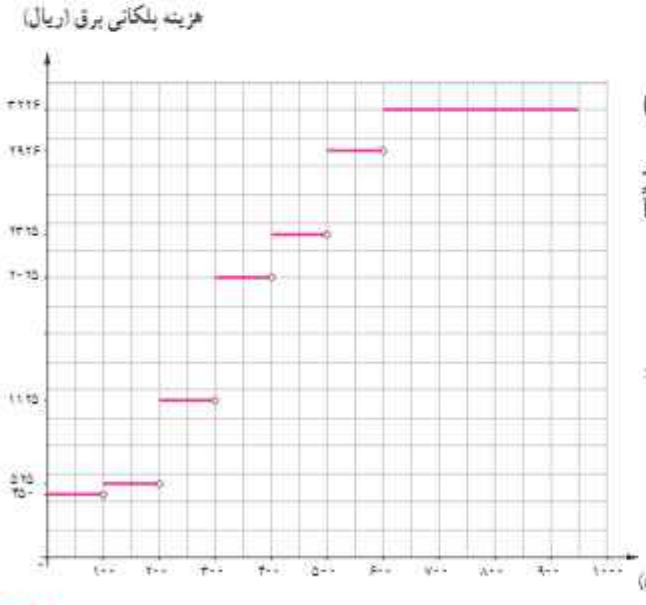
تابع پلکانی (*Step Function*)

روش محاسبهٔ قبض برق

محاسبهٔ هزینهٔ برق مصرفی در هر خانه بر اساس میزان «کیلووات ساعت» برقی است که در هر سی روز در یک خانه مصرف می‌شود. یک کیلووات ساعت (*kwh*) در واقع مصرف یک وسیلهٔ هزار واتی در مدت زمان یک ساعت است، مثلاً اگر ۱۰ لامپ صد واتی را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلووات ساعت برق مصرف کرده‌ایم.

اگر فرض کنیم مصرف برق یک خانه در سی روز ۲۴۶/۲۳ *kwh* بوده است، برای محاسبهٔ هزینهٔ مصرف برق، میزان کیلووات ساعت مصرفی مطابق این جدول به صورت پلکانی تقسیم می‌شود.

پله های مصرف ۳۰ روزه	نرخ (ریال)	مصرف ۳۰ روزه	مبلغ ۳۰ روزه
مصرف ۰ تا ۱۰۰	۴۵۰	۱۰۰	۴۵۰۰۰
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۲۵	۱۰۰	۵۲۵۰۰
مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۱۱۲۵	۴۶/۲۳	۵۲۰۰۲
مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰	۲۰۳۵	۰	۰
مازاد بر ۴۰۰ تا ۵۰۰	۲۳۲۵	۰	۰
مازاد بر ۵۰۰ تا ۶۰۰	۲۹۲۶	۰	۰
مازاد بر ۶۰۰	۳۲۲۶	۰	۰



مجموع مبالغ ستون آخر، مبلغ قبض یک ماه (سی روز) را مشخص می‌کند(البته در عمل به این مبلغ مالیات بر ارزش افزوده و عوارض برق و... اضافه می‌شود و عموماً قبض‌های برق برای بیشتر از سی روز صادر می‌شوند).

جدول بالا را با نمودار روبه‌رو نیز می‌توان مشخص کرد :

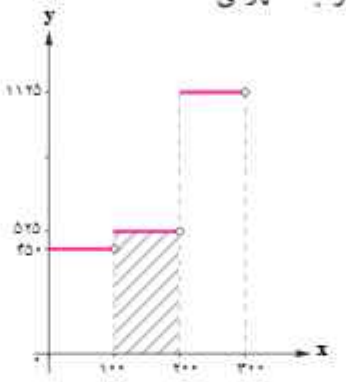
نمودار بالا نمودار یک تابع چندضابطه‌ای است که در هر ضابطه مقدار تابع عددی ثابت است. این نوع توابع را توابع پلکانی می‌نامند.

فعالیت

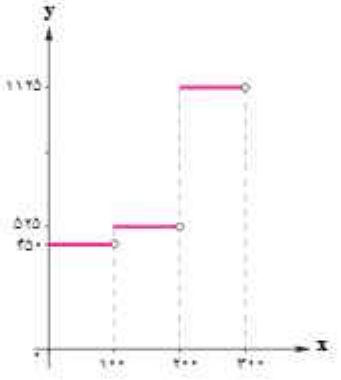
به کمک نمودار پلکانی رسم‌شده برای محاسبه هزینهٔ برق مصرفی یک خانه :

۱. هزینهٔ kwh ۱۰۰ اول چگونه محاسبه می‌شود؟ آیا می‌توانیم مساحتی را در نمودار داده شده، مشخص کنیم که این هزینه را تعیین کند؟

۲. مساحت قسمت هاشورخوردهٔ زیر بیانگر چه مفهومی است؟



۳. هزینهٔ کل برق مصرفی این خانه معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزنید و مقدار هزینه را مشخص کنید.

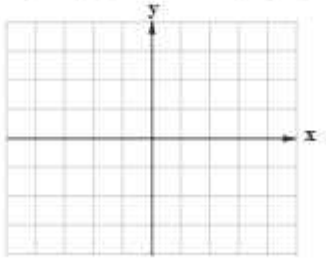


تابع علامت(*Sign Function*)

کار در کلاس

بر اساس ضابطهٔ تابع پلکانی $y=f(x)$، نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

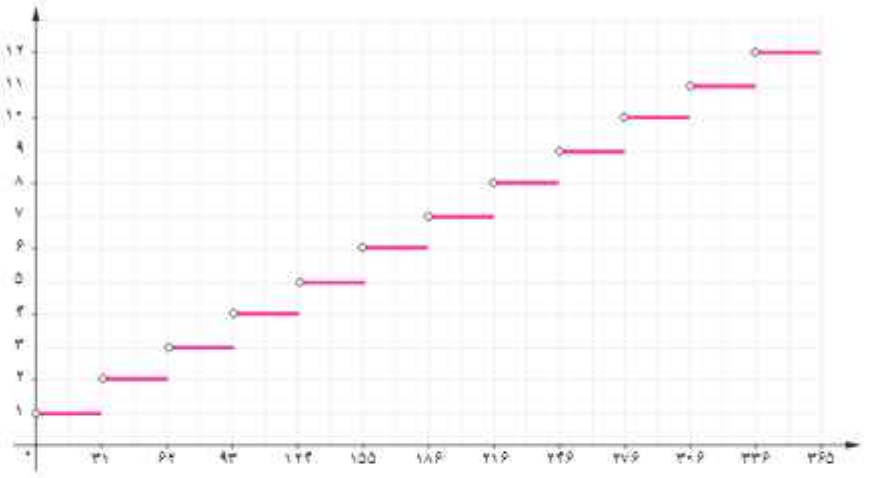
$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$



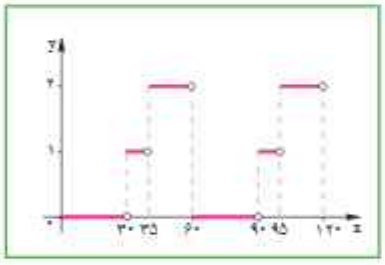
تابع بالا را تابع علامت یا تابع $y = sign(x)$ می‌نامند.

کار در کلاس

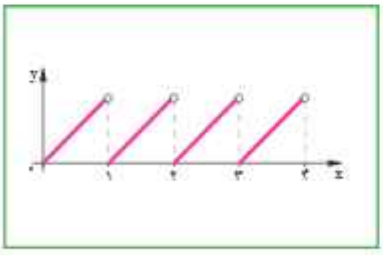
۱. نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می‌کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت‌هایی هستند؟ واحدهای آنها را مشخص کنید. ضابطهٔ تابع را بنویسید؟



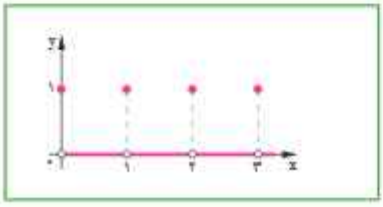
۲. هر کدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید.



یک ساعت شنی که شن با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.



پرنده‌ای که در یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.



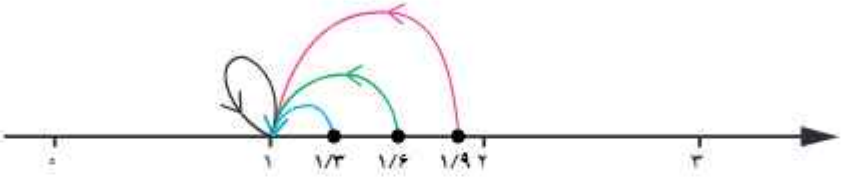
چراغ راهنمایی و رانندگی سه حالته.

تابع جزء صحیح (*Greatest Integer Function*)

فعالیت

فرض کنید g تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متوالی، عدد صحیح کوچک‌تر را نسبت می‌دهد.

برای مثال، در این تابع اگر x عدد صحیح ۱ انتخاب شود یا عددی بین ۱ و ۲ باشد، تابع g، این اعداد را به عدد ۱ نسبت می‌دهد. به بیانی دیگر :



(شکل ۱)

$$۱ \le x < ۲ \quad \Rightarrow \quad g(x) = ۱$$

مطابق تعریف تابع g، اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی ۲- و ۳- باشد، این تابع مقادیر x را به عدد ... نسبت می‌دهد (شکل ۲).

و اگر x عددی بین اعداد ۲ و ۳ باشد، این تابع مقادیر x را به عدد ... نسبت می‌دهد(شکل ۳).

$$\ldots \le x < \ldots \quad \Rightarrow \quad g(x) = \ldots$$

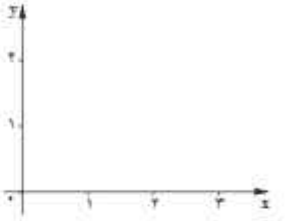
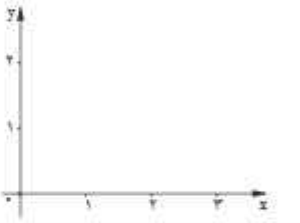
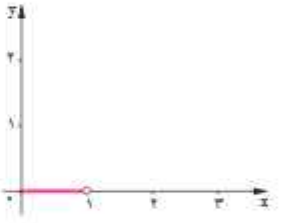
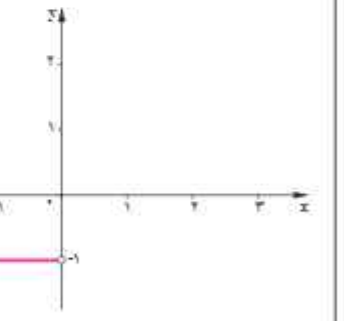
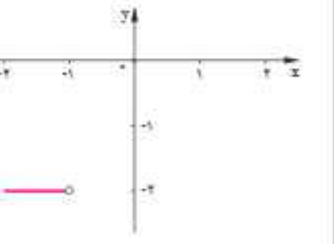
(شکل ۲)

$$\ldots \le x < \ldots \quad \Rightarrow \quad g(x) = \ldots$$

(شکل ۳)

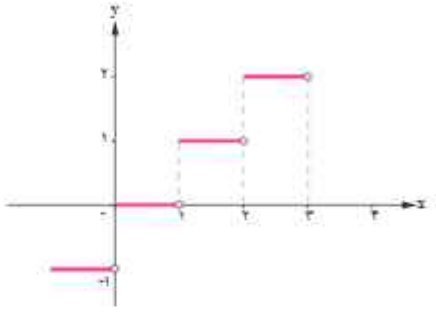
کار در کلاس

به کمک تابع g که در فعالیت صفحهٔ قبل تعریف شده است، جدول زیر را کامل کنید.

نمودار تابع	جواب تابع g	حدود x
	$g(x) =$	$2 \leq x < 3$
	$g(x) = 1$	$1 \leq x < 2$
	$g(x) =$	$0 \leq x < 1$
	$g(x) = -1$	$\leq x <$
	$g(x) =$	$\leq x <$

این حالت‌ها را می‌توانیم با یک تابع چندضابطه‌ای و نمودار متناظرش به‌صورت زیر بیان کنیم :

$$g(x)=\begin{cases}\vdots & \\ -1 & -1\le x<0\\ 0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<2\\ 2 & 2\le x<3\\ \vdots & \end{cases}$$



تابعی را که به هر عدد صحیح k خود همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$، عدد صحیح k را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند. ضابطهٔ این تابع را با $g(x)=[x]$ (بخوانید جزء صحیح x) معرفی می‌کنند.

کار در کلاس

به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد، حاصل عبارت‌های خواسته‌شده را به‌دست آورید.

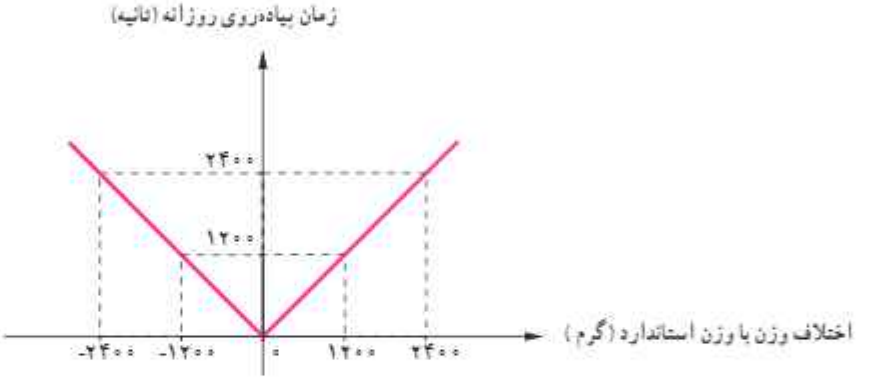
$[2]$	$[2/7]$	$[-2/7]$
$[0/7]$	$[-0/7]$	$[-0/07]$
$[-3/2]$	$[-\pi]$	$[-2/2]$

تابع قدرمطلق (*Absolute Value Function*)

فعالیت

فعالیت ۱. هر چند امروزه بخش عمده‌ای از افراد از اضافه وزن رنج می‌برند، بخش دیگری نیز دچار کمبود وزن نسبت به وزن استاندارد هستند. هر دو گروه باید تلاش کنند که وزن خود را استاندارد کنند. یک روش برای این کار، پیاده‌روی منظم روزانه است. فرض کنیم یک گروه خاص از افراد در یک روز، به ازای هر یک گرم افزایش یا کاهش وزن باید یک ثانیه پیاده‌روی کند. بر این اساس فردی با ۱۲۰۰ گرم اضافه وزن یا ۱۲۰۰ گرم کمبود وزن باید ۱۲۰۰ ثانیه، یعنی ۲۰ دقیقه روزانه به‌صورت منظم پیاده‌روی کند و فردی با ۲۴۰۰ گرم اضافه وزن یا ۲۴۰۰ گرم کمبود وزن باید روزانه ۲۴۰۰ ثانیه یعنی ۴۰ دقیقه به‌صورت منظم پیاده‌روی کند.

این مفهوم را می‌توان به کمک نمودار زیر نشان داد :



اگر مقدار اضافه وزن را با علامت مثبت و مقدار کمبود وزن را با علامت منفی نشان دهیم و f بیانگر تابعی باشد که میزان پیاده‌روی بر حسب ثانیه را نشان می‌دهد، اطلاعات پیش‌گفته را به صورت زیر می‌توانیم بیان کنیم :

$f(۱۲۰۰) = \cdots\cdots$ $\quad f(-۱۲۰۰) = \cdots\cdots$ $\quad f(\cdots\cdots) = ۲۴۰۰$ $\quad f(\cdots\cdots) = -۲۴۰۰$

که این مفهوم را در یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم :

$$f(x)=\begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

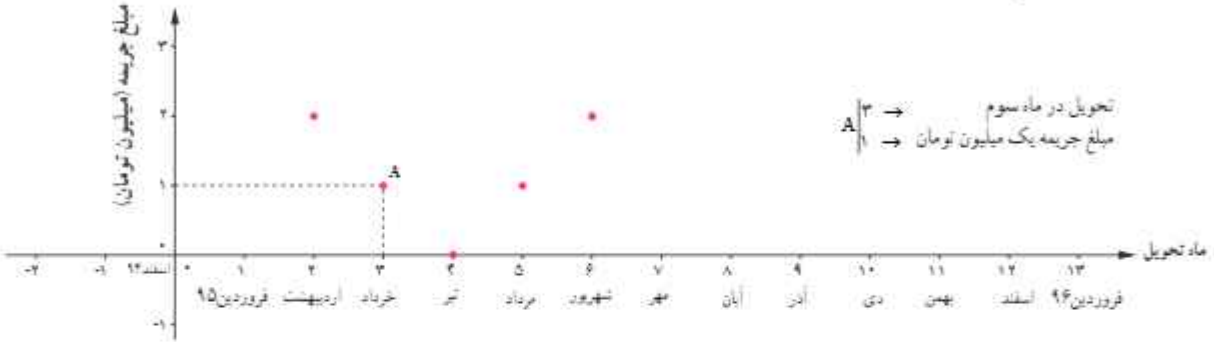
این تابع را می‌توان چنین تعبیر کرد که هر مقدار در دامنه را، به قدر مطلق همان مقدار در برد نظیر می‌کند.

تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|$ ، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود و مطابق تعریف :

$$f(x)=\begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

فعالیت ۲ . پلی که روی رودخانهٔ سیمینه‌رود در استان آذربایجان غربی ساخته شده، طبق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه باید در تیر ۱۳۹۵ افتتاح شود. اگر احداث این پل زودتر از موعد مقرر انجام شود، به دلیل هزینهٔ نگهداری پل و عدم استفاده از آن (به‌خاطر پایان نیافتن بقیهٔ جادهٔ مواصلاتی به پل) به ضرر است. همچنین تأخیر در زمان افتتاح پل نیز موجب خسارت به صاحب کار (وزارت راه) است. بر این اساس مطابق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه به ازای هر یک ماه اختلاف با زمان تحویل، پیمانکار متعهد است یک‌میلیون تومان جریمه پرداخت کند. تحویل پروژه به روز بستگی ندارد؛ بلکه به ماه تحویل بستگی دارد.

الف. نمودار تابع جریمه برحسب زمان تحویل پروژه در ماه‌های مختلف را کامل کنید.



ب. آیا می‌توانید این نمودار را به زبان یک تابع قدر مطلقی بیان کنید؟

ج. اگر پیمانکار چهارمیلیون تومان جریمه پرداخت کرده باشد، تحویل پروژه در چه ماه یا ماه‌هایی می‌تواند انجام شده باشد؟ چرا؟ پاسخ این پرسش را به کمک نمودار بالا و ضابطهٔ تابع قدر مطلق به‌دست‌آمده توضیح دهید.

کار در کلاس

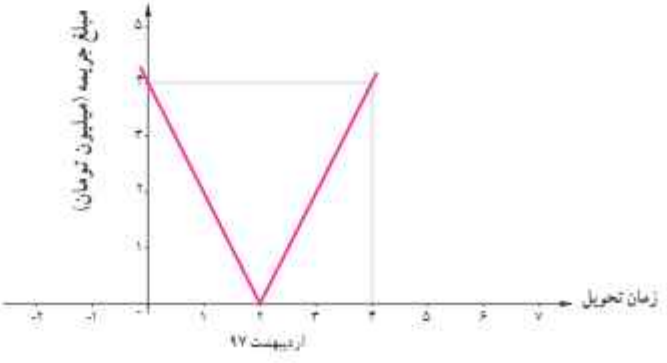
با توجه به نمودار

الف. شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.

ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطهٔ هریک از نیم‌خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به‌دست آورید.

ج. به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

د. شیب خط در تابع به‌دست‌آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟



حل یک مسئله

نمودار تابع $y=|۲x-۶|$ را رسم کنید.

با توجه به تعریف قدرمطلق $|u|=\begin{cases}u & u\geq ۰\\ -u & u<۰\end{cases}$

$$y=|۲x-۶|=\begin{cases}۲x-۶ & ۲x-۶\geq ۰ \quad (۱)\\ -(۲x-۶) & ۲x-۶<۰ \quad (۲)\end{cases}$$

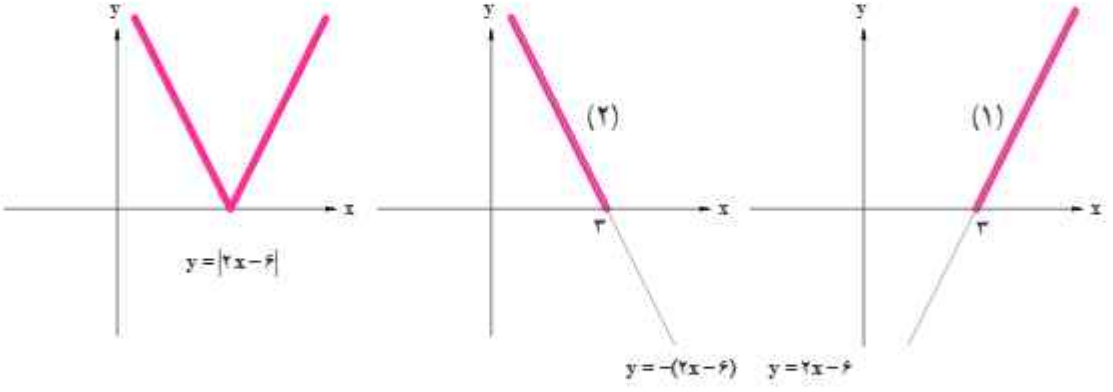
برای تعیین حدود x برای هرکدام از ضابطه‌های بالا، به کمک قوانین نامساوی‌ها در ریاضی نهم :

$$\begin{cases}۲x-۶\geq ۰\,,\ ۲x\geq ۶\Rightarrow x\geq ۳ & (۱)\\ ۲x-۶<۰\,,\ ۲x<۶\Rightarrow x<۳ & (۲)\end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع این‌گونه مشخص می‌شود :

$$y=|۲x-۶|=\begin{cases}۲x-۶ & x\geq ۳ \quad (۱)\\ -(۲x-۶) & x<۳ \quad (۲)\end{cases}$$

و نمودار تابع به‌صورت زیر رسم می‌شود :



کار در کلاس

الف. نمودار $y=|x-۴|$ را رسم کنید.

ب. نمودار $y=|x|$ را در همین صفحهٔ مختصات رسم کنید.

ج. آیا می‌توان بدون مراحل حل بالا، بر اساس نمودار $y=|x|$ ، نمودار $y=|x-۴|$ را رسم کرد؟ چگونه؟

د. نمودار $y=|x-۳|$ و $y=|x+۱|$ را با توجه به «ج» رسم کنید.

هـ. نمودار $y=|x|+۱$ را چگونه می‌توان براساس نمودار $y=|x|$ رسم نمود؟

تمرین

۱. به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور زیر حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$[۳/۹۹] =$ $[-۴/۲] =$ $[۴/۲] =$

$[\pi] =$ $[-۲] =$ $[-۱/۲] =$

۲. باتوجه به تعریف تابع جزء صحیح، جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	مقدار x	مقدار $f(x)$
$f(x) = [x]$	$x = -۲/۳$ $x = ۵$	
$f(x) = [-x]$	$x = ۱/۷$ $x = ۲/۳$	
$f(x) = [x] + [-x]$	$x = ۱$ $x = ۱/۳$ $x = ۱/۷$ $x = ۲$	
$f(x) = [۳x]$	$x = ۱$ $x = ۰/۲$ $x = ۱/۳$	

۳. جدول مالیاتی زیر را که توسط هیئت مدیرهٔ یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید :

حقوق ماهیانه (تومان)	نرخ مالیات (درصد)
حقوق تا ۱/۳۰۰/۰۰۰	معاف از مالیات
مازاد بر ۱/۳۰۰/۰۰۰ تا ۲/۵۰۰/۰۰۰	۱۰
مازاد بر ۲/۵۰۰/۰۰۰ تا ۴/۵۰۰/۰۰۰	۱۵
مازاد بر ۴/۵۰۰/۰۰۰	۲۵

الف. نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

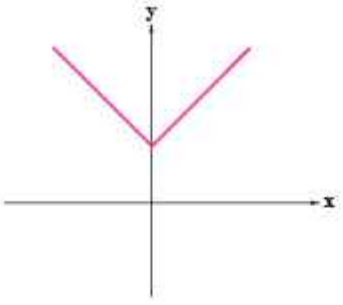
ب. به کمک نمودار پلکانی و محاسبهٔ سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهیانه، مبلغ مالیات هر کدام از کارمندان زیر را محاسبه کنید.

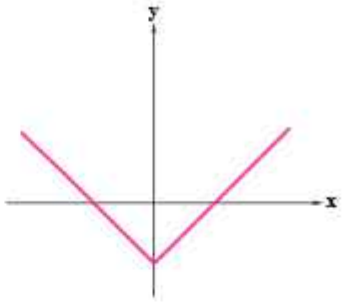
- کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ تومان
- کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰ تومان
- کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰ تومان

۴. با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع الف و کدام نمودار، تابع ب را مشخص می‌کند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) $y = |x| + ۲$

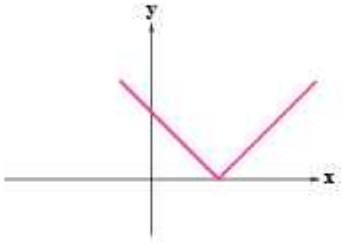
ب) $y = |x| - ۳$

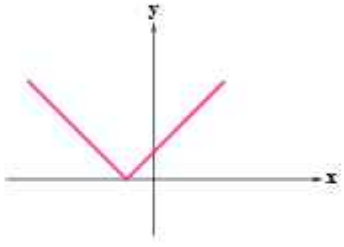




الف) $y = |x + ۱|$

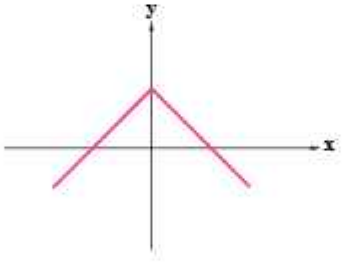
ب) $y = |x - ۴|$

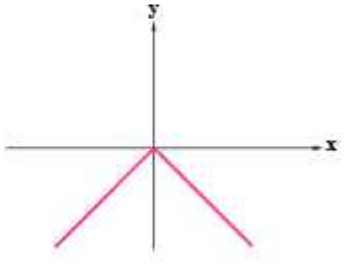




الف) $y = -|x|$

ب) $y = -|x| + ۱$



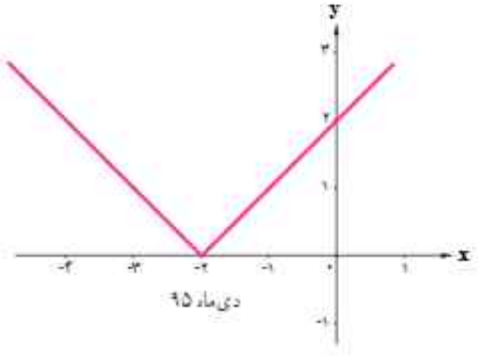


۵. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = |۲x - ۳|$

ب) $y = |۳x + ۱|$

۶. با توجه به نمودار



الف. شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.

ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطهٔ هر یک از نیم‌خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به‌دست آورید.

ج. به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

د. شیب خط در تابع به‌دست‌آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟ افزایش یا کاهش شیب خط به چه معناست؟

درس ۳

اعمال بر روی توابع

فعالیت

علیرضا، دانشجوی رشتهٔ اقتصاد است و با پدر و مادر و خواهرش مریم (دوازده‌ساله) زندگی می‌کند. وی می‌خواهد در جشنوارهٔ فیلم و تئاتر دههٔ فجر امسال اعضای خانواده‌اش را به تماشای یک فیلم یا تئاتر دعوت کند. با توجه به تفاوت علاقه‌مندی اعضای خانواده‌به سبک‌های مختلف فیلم و تئاتر و تنوع موارد نمایش داده‌شده در سینما و تئاتر، برخلاف تصور اولیه‌اش، نتوانست به‌سادگی تصمیم بگیرد که چه فیلمی را می‌تواند با اعضای خانواده‌اش ببیند. بنابراین :

۱. ابتدا با یک پرسش‌نامه سبک دلخواه هر یک از اعضای خانواده را مشخص کرد؛ زیرا بدیهی است که او تمایل دارد با هر کدام از اعضای خانواده‌اش به دیدن فیلم یا تئاتری برود که سلیقهٔ سینمایی آنها و خودش را تأمین کند.

۲. با توجه به بودجهٔ محدودی که برای این اقدام در نظر گرفته است، تمایل دارد که بداند هزینهٔ صرف‌شده در این هفته چقدر خواهد بود.

جدول زیر هزینهٔ بلیت سینما و تئاتر را برای گروه‌های مختلف مشخص کرده است. مسئولان جشنواره در بخش‌هایی برای کودک و نوجوان و نیز دانشجویان تخفیف‌هایی قائل شده‌اند. لطفاً جدول را کامل کنید.

جدول ۱. هزینهٔ بلیت با توجه به گروه‌های مختلف

مکان نمایش / گروه سنی	سینما	تئاتر	سینمای کودک و نوجوان
فرد عادی	۱۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۴۰۰۰
دانشجو	۲۰٪ تخفیف =	۲۰٪ تخفیف =	۴۰۰۰
کودک و نوجوان	۱۰۰۰	۵۰٪ تخفیف =	۵۰٪ تخفیف =

علیرضا نتایج پرسش‌نامه داده شده به اعضای خانواده را در جدول‌های زیر مشخص نمود :

جدول ۲. علاقه‌مندی به سینمای کودک و نوجوان

سبک فیلم / اعضای خانواده	کمدی	تاریخی	انیمیشن	علمی ـ تخیلی
مریم	✓		✓	✓
علیرضا		✓	✓	✓

جدول ۳. علاقه‌مندی به سینما

سبک فیلم / اعضای خانواده	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی	حادثه‌ای	علمی ـ تخیلی
مادر	✓			✓		✓
پدر		✓	✓	✓		
مریم						
علیرضا		✓		✓		✓

جدول ۴. علاقه‌مندی به تئاتر

سبک تئاتر / اعضای خانواده	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی
مادر	✓	✓	✓	
پدر		✓	✓	✓
مریم	✓		✓	
علیرضا			✓	

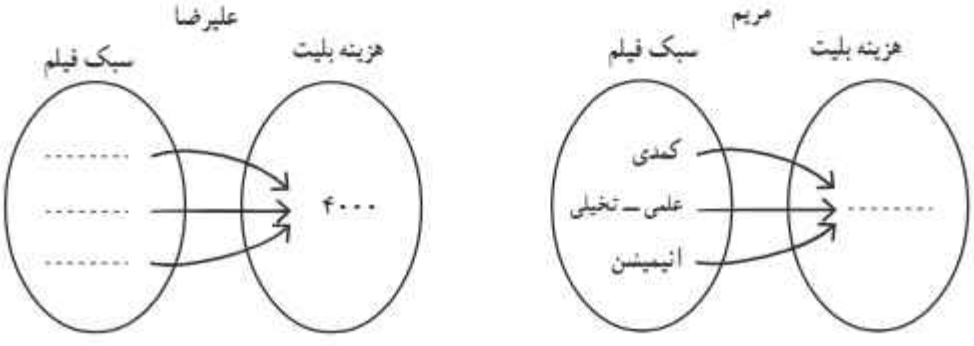
در نخستین روز هفته (شنبه)، علیرضا می‌خواهد خواهرش را به تماشای یک فیلم در سینمای کودک ونوجوان ببرد.

او باید دو نکته را مشخص کند :

۱. به دیدن چه سبک فیلمی می‌روند؟

۲. هزینهٔ بلیت آنها چقدر است؟

طبیعی است که علیرضا و خواهرش به دیدن سبک فیلمی خواهند رفت که هر دو به آن علاقه‌مند باشند؛ به بیان دیگر این سبک فیلم در اشتراک علاقهٔ، دو نفرشان باشد. با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ اگر این دو نفر را تابعی در نظر بگیریم که «دامنهٔ» آن سبک فیلم مورد علاقه هرکدام باشد و «برد» آن هزینهٔ خرید بلیت، نمایش‌های پیکانی این دو تابع به صورت زیر است :



پس اشتراک فیلم مورد علاقه‌شان دو سبک فیلم ..... و .....است و برای تماشای یکی از این دو سبک یا هر دو نوع آنها می‌توانند به سینما بروند. این مطلب را می‌توانیم چنین نشان دهیم :

{(۴۰۰۰،) و (۴۰۰۰،) و (۴۰۰۰،)} = علیرضا

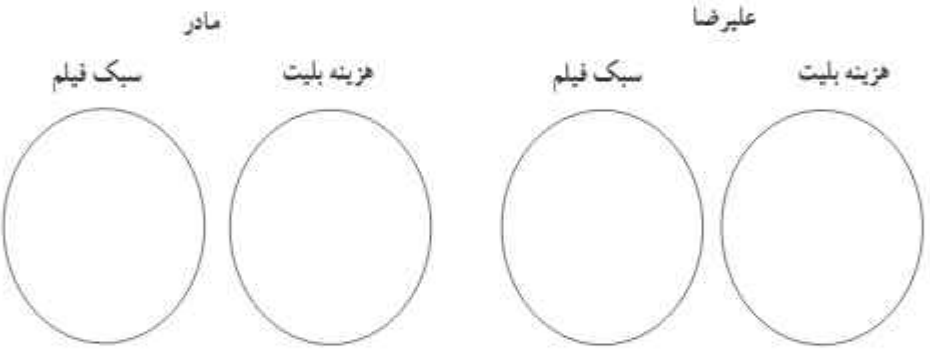
{(، علمی ــ تخیلی) و (، انیمیشن) و (، کمدی)} = مریم

{(۴۰۰۰+ ،) و (۴۰۰۰+ ،) و (۴۰۰۰+ ،)} = مریم + علیرضا

کار در کلاس

۱. اگر در روز دوشنبه علیرضا بخواهد مادرش را به تماشای یک فیلم در سینما دعوت کند، با توجه به جدول ۱و جدول۳ :

الف. نمایش‌های یکانی مشابه فعالیت صفحهٔ قبل را برای هرکدام رسم کنید.



ب. با توجه به اشتراک سبک فیلم موردعلاقهٔ هرکدام، نمایش زوج‌مرتبی تابعی را بنویسید که علیرضا و مادرش می‌توانند به تماشای فیلمی در سینما بنشینند.

ج. هزینه‌ای که در این روز علیرضا صرف می‌کند، چقدر است؟

۲. پنج‌شنبه علیرضا می‌خواهد همهٔ اعضای خانواده‌اش را به تماشای یک تئاتر ببرد. با استفاده از جدول۱ و جدول۴،

الف. نمایش زوج‌مرتبی هرکدام از اعضای خانواده و سپس نمایش زوج‌مرتبی شرایطی را که همهٔ آنها به تماشای یک تئاتر می‌روند، مشخص کنید.

ب. علیرضا در این روز چه میزان هزینه می‌کند؟

با توجه به فعالیت مطرح‌شده پرسش مهم زیر را پاسخ می‌دهیم :

با چه شرایطی می‌توان دو تابع f و g را با یکدیگر جمع کرد؟

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، $f+g$ تابعی است که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این اشتراک داریم :

$$(f+g)(x) = f(x)+ g(x)$$

برای مثال اگر :

$$f = \{(۱ , ۲) \text{ و } (-۳ , ۴) \text{ و } (۳ , ۵) \text{ و } (۷ , -۱)\}$$

و

$$g = \{(۲ , ۱) \text{ و } (۳ , -۱) \text{ و } (۷ , ۲)\}$$

فرض شود با توجه به دامنه‌های دو تابع f و g :

$$D_f = \{۱ , -۳ , ۳ , ۷\}$$

$$D_g = \{۲ , ۳ , ۷\}$$

اشتراک دو دامنه برابر است با :

$$D_f \cap D_g = \{۳ , ۷\}$$

پس تابع $f+g$ این‌گونه مشخص می‌شود :

$$f+g = \{(۳,-۱ +۵) \text{ و } (۷,۲+(-۱))\} = \{(۳,۴) \text{ و } (۷,۱)\}$$

فعالیت

با توجه به ضابطه‌های $f_1(x)=x^2-1$ و $f_2(x)=x+1$ ، ضابطهٔ توابع زیر را به دست آورید :

$f_3(x)=f_1(x)+f_2(x)=(x^2-1)+(x+1)=$ $\qquad$ $f_4(x)=$

$f_5(x)=f_1(x)-f_2(x)=$ $\qquad$ $f_6(x)=$

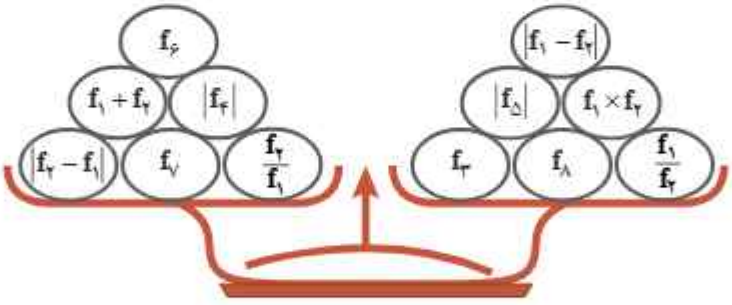
$f_7(x)=f_2(x)-f_1(x)=$ $\qquad$ $f_8(x)=$

$f_9(x)=f_1(x)\times f_2(x)=$ $\qquad$ $f_{10}(x)=$

$f_{11}(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=$ $\qquad$ $f_{12}(x)=$

$f_{13}(x)=\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}=$ $\qquad$ $f_{14}(x)=$

اگر مقادیر تابع‌های f_9 تا f_{14} به ازای $x=2$ نمادهای وزنه‌های کفه‌های ترازو باشند، چرا دو کفهٔ ترازو با هم برابرند؟ از این پاسخ چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟



عمل‌های جمع، تفریق، ضرب وتقسیم روی دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شوند :

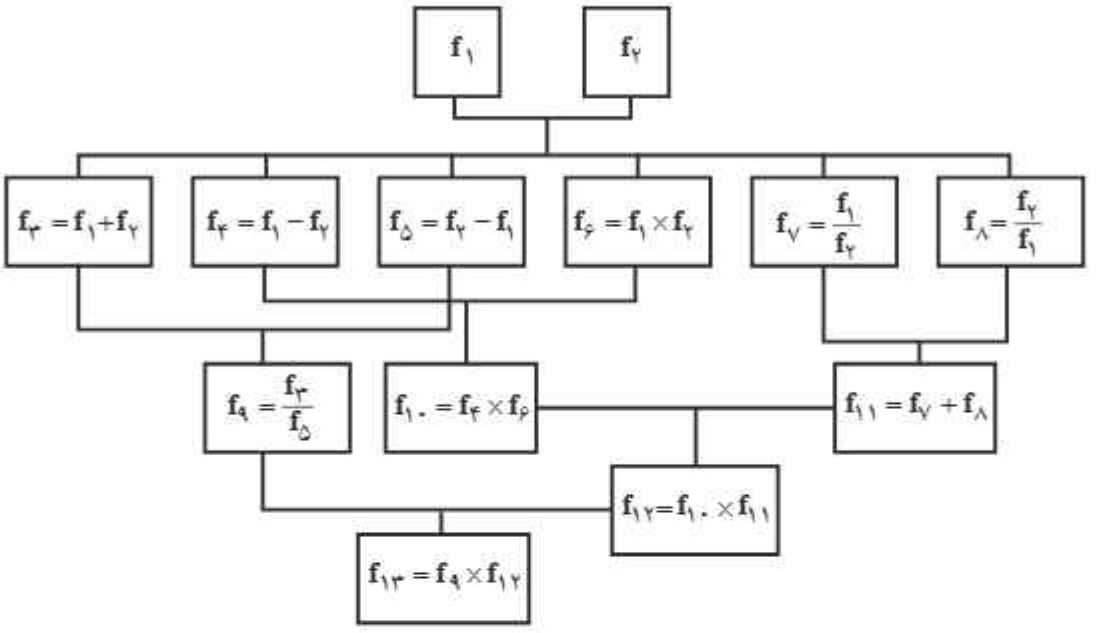
$(f\pm g)(x)=f(x)-g(x)$ $\qquad$ $D_{f\pm g}=D_f\cap D_g$

$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$ $\qquad$ $D_{f\times g}=D_f\cap D_g$

$(\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad$ $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}$

کار در کلاس

۱. باتوجه به ضابطهٔ $f_1(x) = x+1$ و $f_2(x) = x-1$ درخت زیر را به ازای $x = 2$ کامل کنید.



۲. اگر $f = \{(-1,3), (-1,4), (2,0)\}$ و $g = \{(2,5), (-1,3), (-1,2)\}$ باشند، توابع زیر را مشخص کنید.

$f + g =$

$f \times g =$

$\frac{g}{f} =$

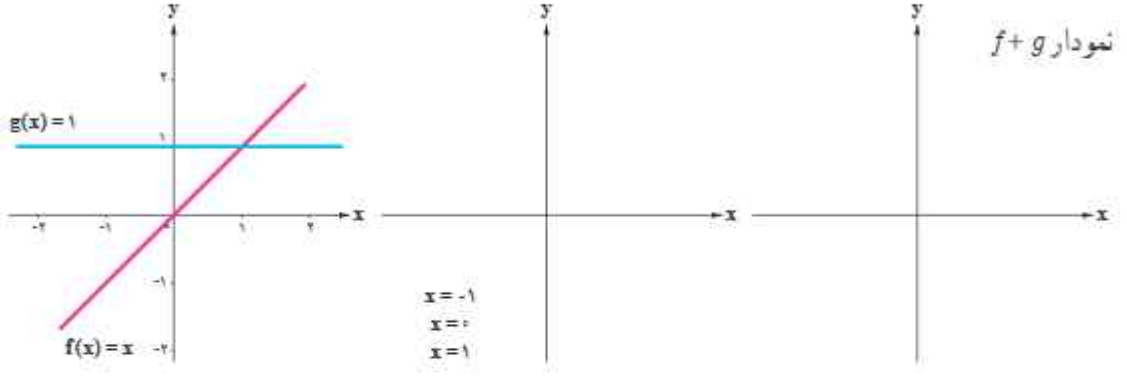
$\frac{f}{g} =$

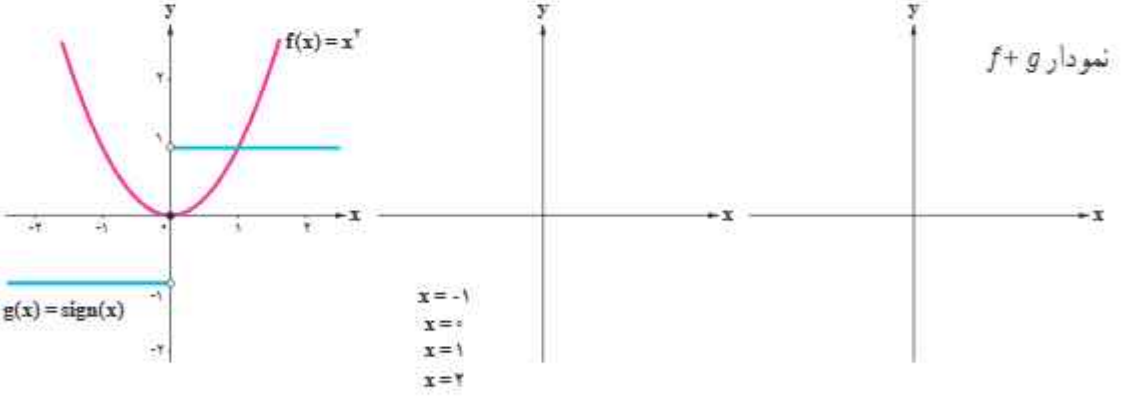
$f - g =$

$g - f =$

فعالیت

به کمک نمودارهای رسم‌شدهٔ توابع f و g، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده‌شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به کمک ضابطهٔ تابع آن و نیز نقاط مشخص‌شده از تابع، رسم کنید.

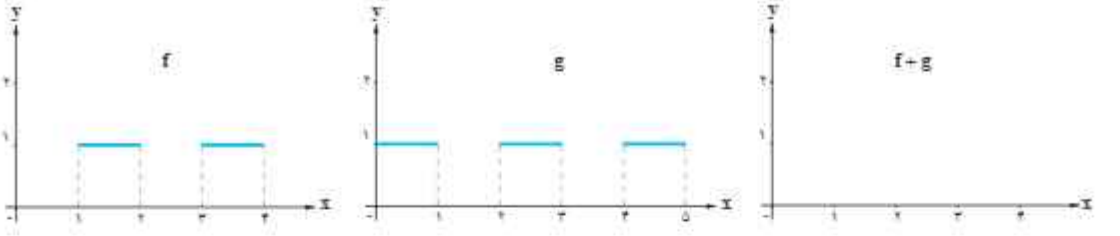




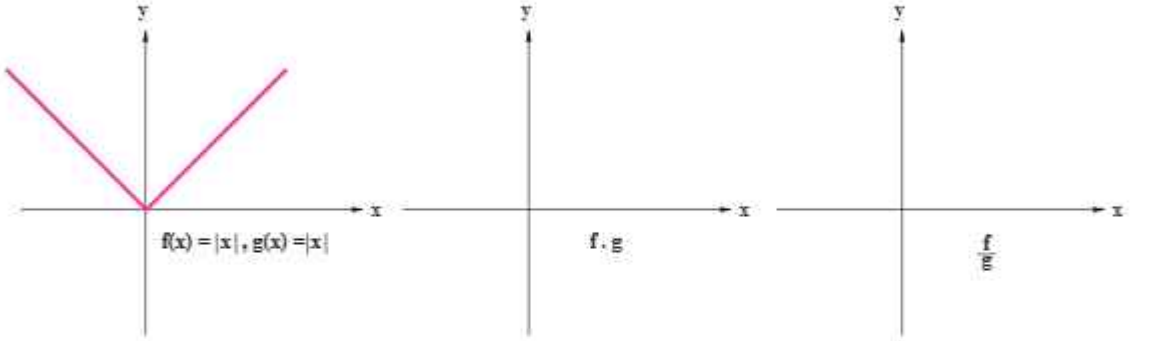
تمرین

۱. در هر حالت با توجه به نمودار توابع f و g، نمودار توابع خواسته‌شده را رسم کنید.

الف)



ب)



۲. یک شرکت هولدینگ[1] دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانهٔ A به ترتیب x ۱۶+$x^2$۲− و ۶+x ۸ و در کارخانهٔ B به ترتیب x۱۲ + x^2− و ۹ +x۲ واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان):

الف. تابع سود شرکت هولدینگ را به‌دست آورید.

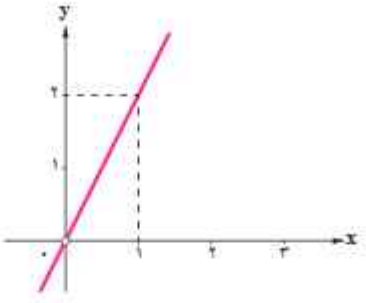
ب. این هولدینگ با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می‌رسد؟

۳. اگر $f(x) = [x]$ با دامنهٔ $0 \le x \le 1$ و $g(x) = |x|$ با دامنهٔ $1 \le x \le 2$ و $h(x) = x^2 - 4$ با دامنهٔ $-1 \le x \le 1$ در نظر گرفته شود، جدول زیر را کامل کنید.

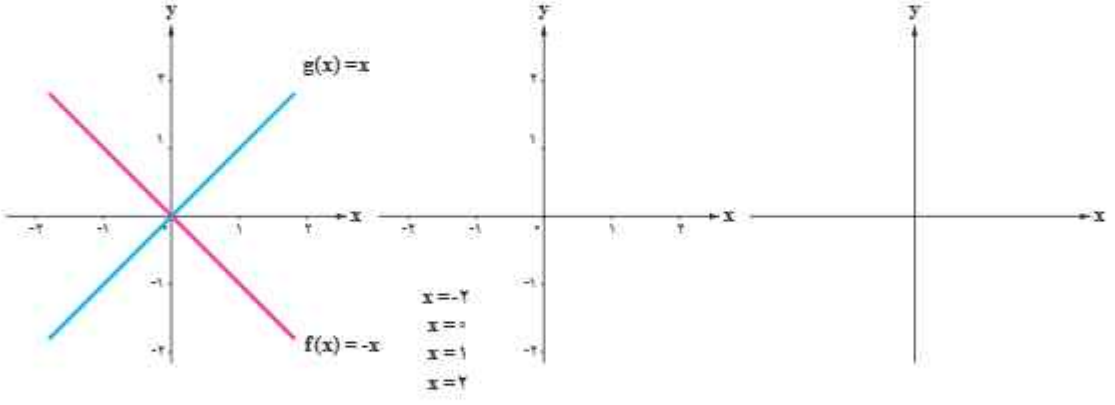
تابع	ضابطه	نمودار
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s(x) =$	
$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$	$q(x) =$	
$p(x) = h(x) \times g(x)$	$p(x) =$	

۱. هولدینگ از واژهٔ لاتین Hold به معنای نگه داشتن می‌آید. شرکت هولدینگ یا مادر، شرکتی سهامی است که دارای «شرکت‌های زیرمجموعه» است. کنترل شرکت‌های زیرمجموعه مستقیماً زیر نظر مدیران و هیئت مدیره شرکت اصلی است.

۴. اگر $f(x) = x^2$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به‌دست آورید؟



۵. به کمک نمودارهای رسم‌شدهٔ توابع f و g، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده‌شده، مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $(f+g)$ را به کمک ضابطهٔ آن و نیز نقاط مشخص‌شده از تابع، رسم کنید.



خواندنی ۱

چرا در عبارات جبری به جای متغیر از حرف x استفاده می‌کنیم؟

در آثار ریاضی اسلامی برخی از اصطلاحات مانند نماد استفاده می‌شدند. یکی از این اصطلاحات کلمهٔ «شی» است که آن را به جای مجهول به‌کار می‌بردند. اولین ترجمهٔ کتاب‌های ریاضی دورهٔ اسلامی به زبان اسپانیایی انجام گرفت. مشکل علمای قرون وسطایی اسپانیا که وظیفه‌شان ترجمهٔ چنین متونی بود، در این زمینه این بود که حرف «ش» و کلمهٔ «شی» قابل تبدیل به زبان اسپانیایی نبود. به دلیل آنکه در اسپانیا صدای «ش» یا «sh» وجود ندارد. صدای «ck» یا «ک» را از یونانی قدیم به شکل χ یا «کای» جایگزین صدای «ش» یا «sh» کردند و بعدها که این متون به زبان‌های رایج‌تر اروپایی ترجمه شد، حرف یونانی «کای» χ ، با حرف لاتین x جایگزین شد.

خواندنی ۲

صنعت کشاورزی که حتی در نگاه نخستین نیز ساده به‌نظر نمی‌رسد، امروزه برای پاسخ‌گویی به تقاضای روزافزون صنایع غذایی، نیازمند تجزیه و تحلیل دقیق‌تر و فناوری پیشرفته‌تر است. به همین دلیل در سال ۲۰۱۶ و در یک پروژه دانشگاهی، در طرحی جالب، کاری گروهی میان کشاورزان، ریاضی‌دانان و متخصصان مهندسی آب با هدف کاهش مصرف آب و البته تمرکز بر کم نشدن میزان محصول شکل گرفت؛ چنان‌که در تأمین بازار و سود کشاورزان خللی به‌وجود نیاید.

برای این هدف یک مدل ریاضی آبیاری طراحی شد که موارد زیر در آن به دقت در نظر گرفته شده بود :

ـ رابطهٔ میان رشد گیاه و مصرف آب در هر مرحله از رشد

ـ بهترین زمان کاشت

ـ مناسب‌ترین مکان کاشت (اینکه در چه زمین‌هایی کاشت انجام شود و در چه زمین‌هایی بستر کاشت مهیا نیست)

نقطهٔ عطف این طرح این بود که کشاورزان هرگز تصور نمی‌کردند چه اطلاعات مهم و تعیین کننده‌ای در اختیار دارند که با این اطلاعات می‌توان به یک مدل ریاضی برای کاشت محصول دست یافت.

امروزه کمک گرفتن از مدل‌های ریاضی در کشاورزی که بر اساس اطلاعات دقیق کشاورزان طراحی می‌شوند، در صنعت کشاورزی نوین به شکل‌گیری شاخه‌ای به نام «کشاورزی دقیق» (Precision farming) انجامیده است. در این شاخه به جمع‌آوری و بررسی داده‌ها بسیار اهمیت داده می‌شود.

مثالی دیگر در این زمینه، طراحی مدلی برای استفاده از کودهای شیمیایی است. در حال حاضر به کمک ماشین‌آلات مجهز به GPS برای نمونه‌برداری از خاک زمین‌های کشاورزی و اطلاعات تجربی کشاورزان می‌توان فهمید که چه بخشی از زمین به کود شیمیایی بیشتر و چه بخشی به کود کمتر نیاز دارد. برآیند این اطلاعات سبب می‌شود که تا میزان قابل توجهی از استفادهٔ بی‌رویهٔ کود شیمیایی جلوگیری شود که نتیجهٔ مستقیم و مفید آن کمتر شدن چشمگیر نیترات در منابع آبی؛ به‌ویژه آب‌های کشاورزی است.

فصل ۳ـ آمار

درس ۱ شاخص‌های آماری

درس ۲ سری‌های زمانی

دانش‌آموزانِ دختر در دورهٔ متوسطه تقریباً ۵۱ درصد از کل دانش‌آموزان این دوره را تشکیل می‌دهند.

درس ۱

شاخص‌های آماری

بسیاری از مواقع، کمّیت‌هایی وجود دارند که می‌توانند معرف پارامتر جامعه باشند.

آیا می‌توانید چند کمّیت را که در سال قبل با آنها آشنا شدید، نام ببرید؟ نام این کمّیت‌ها چه بود؟

فعالیت

نمونه‌گیری از هزینه و درآمد خانوارها، یکی از مهم‌ترین طرح‌های آمارگیری در هر کشوری است. آیا تاکنون فکر کرده‌اید متوسط درآمد ماهانهٔ خانوارهای یک کشور را چگونه محاسبه می‌کنند؟ سرشماری، روشی مقرون به‌صرفه برای گردآوری داده‌ها به‌منظور پاسخ به این سؤال نیست.

در اینجا صورت ساده‌تر آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید، می‌خواهیم متوسط درآمد کارکنان یک مؤسسهٔ تجاری را محاسبه کنیم. ده نفر از کارکنان را به‌صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. اگر درآمد ماهانهٔ ده نفر برحسب هزار تومان به‌صورت زیر باشد، میانگین و میانهٔ درآمد ماهانهٔ آنها چه‌قدر است؟

هیئت مدیرهٔ مؤسسهٔ تجاری تصمیم دارد به کارکنانی که درآمد کمتری دارند، یارانه پرداخت کند. به نظر شما به چه کسانی باید یارانه پرداخت شود؟ اگر تعداد اعضای خانوار هر عضو نمونه به‌صورت زیر باشد، میانگین و میانهٔ درآمد هر یک از افراد چه‌قدر است؟ آیا با دانستن این داده‌ها نظر شما دربارهٔ سؤال قبل تغییر کرده است؟ یعنی به کدام‌یک از کارکنان مؤسسه یارانه پرداخت کنیم؟

ردیف	درآمد ماهانه (هزار تومان)	تعداد اعضای خانوار	متوسط درآمد اعضای خانوار
۱	۱۰۰۰	۳	
۲	۳۰۰۰	۴	
۳	۱۰۰۰	۱	
۴	۴۰۰۰	۵	
۵	۳۰۰۰	۱	
۶	۳۰۰۰	۷	
۷	۲۰۰۰	۳	
۸	۱۰۰۰	۴	
۹	۲۰۰۰	۲	
۱۰	۱۰۰۰	۱	

خط فقر کمینهٔ درآمدی است که برای زندگی یک نفر در یک ماه، مورد نیاز است. خط فقر برابر است با **نصف میانگین** یا **نصف میانهٔ** درآمد ماهانهٔ افراد جامعه[1].

کار در کلاس

در فعالیت قبل، خط فقر را به دو روش ذکرشده محاسبه کنید. هیئت مدیرهٔ مؤسسهٔ تجاری تصمیم دارد مقدار یارانه را براساس **نصف میانه** محاسبه کند. به هریک از کارکنان، چه مقدار یارانه بدهند که خانوادهٔ او حداقل درآمدی بیش از خط فقر داشته باشد؟

کار در کلاس

خط فقر بین‌المللی توسط بانک جهانی در سال جاری، در حدود چهار هزار تومان (۱/۲۵ دلار آمریکا) برای هر نفر در روز تعیین شده است.

۱. در فعالیت قبل، چند خانوار، درآمدی کمتر از چهار هزار تومان دارند.

۲. اگر درآمد یک خانوار سه نفری در یک ماه، دو میلیون تومان باشد، این خانوار طبق این تعریف چه وضعیتی دارد؟

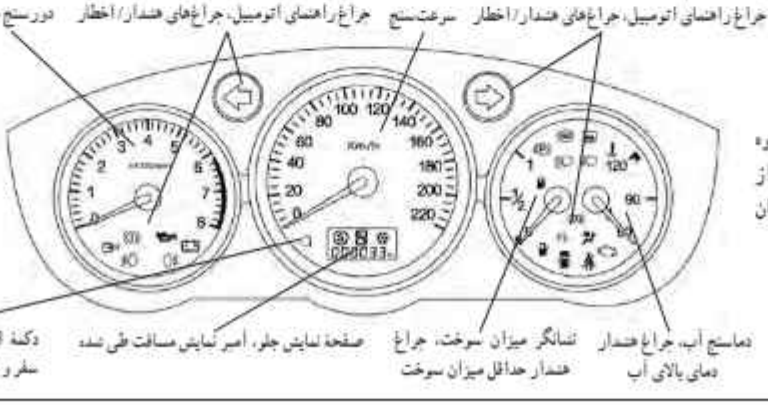
۳. متوسط درآمد ماهانهٔ یک خانوار سه‌نفره در ماه، باید حداقل چه‌قدر باشد تا شخص فقیر نباشد؟

۴. در فعالیت قبل، میزان یارانه را با خط فقر بین‌المللی برای هر یک از کارکنان محاسبه کنید.

۵. چه موقع دو روش محاسبهٔ خط فقر، تفاوت زیادی با هم دارند؟ چرا؟

شاخص[2] یک معیار آماری است که تغییرات نسبی در جامعهٔ آماری را نشان می‌دهد.

شاخص‌ها نه‌تنها مانند جدول‌های فراوانی و نمودارها، متغیرهای داده‌ها را خلاصه می‌کنند، بلکه واقعیت‌های مفیدی دربارهٔ جامعه را به‌سادگی به ما نشان می‌دهند و امکان مقایسه را فراهم می‌کنند. مثلاً خط فقر، شاخصی است که افرادی را که حداقل درآمد برای زندگی را ندارند، مشخص می‌کند. این شاخص به ما کمک می‌کند در طی زمان، امکان بررسی تأثیر سیاست‌های دولت‌ها برای فقرزدایی را رصد کنیم.



داشبورد خودرو که از میان انبوه اتفاقات داخل خودرو برخی از مهم‌ترین شاخص‌ها را به راننده نشان می‌دهد.

۱ـ از این تعریف خط فقر (Poverty line) به دلیل سادگی آن استفاده شده است. دولت‌ها از تعریف بسیار دقیق‌تری استفاده می‌کنند. در این کتاب، منظور از خط فقر، همین تعریف است.

۲ـ معمولاً شاخص‌ها (Indices) بر اساس چند آماره محاسبه می‌شوند. هدف ما تحلیل و تفسیر آنهاست.

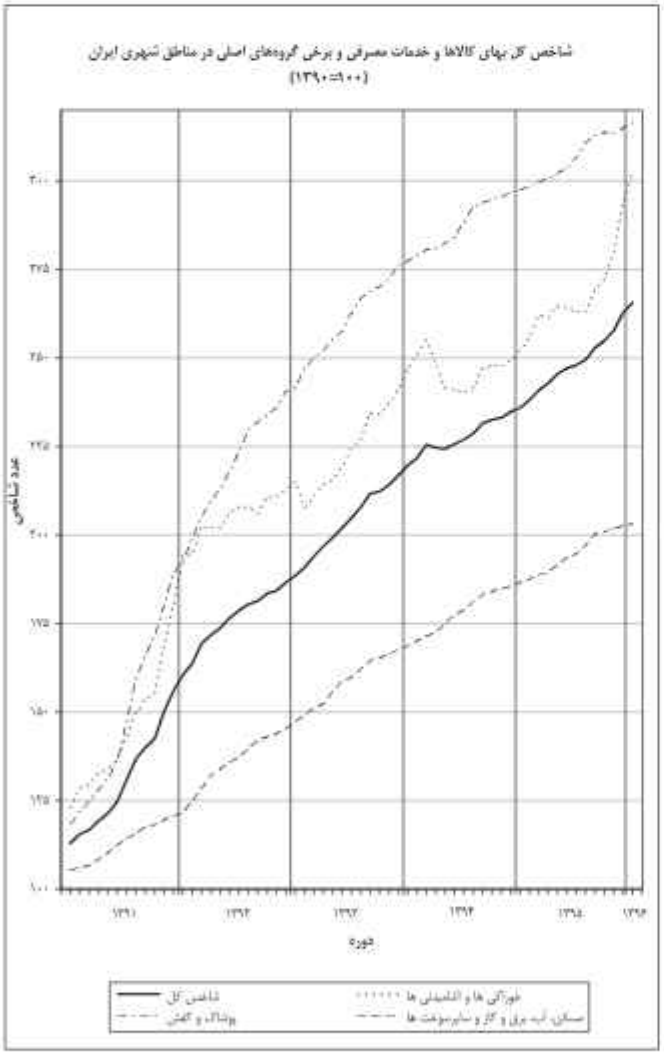
فعالیت

می‌خواهیم با پرداخت یارانهٔ ثابت به خانوارها تعداد کسانی را که درآمدی کمتر از خط فقر دارند، کاهش دهیم. اگر بودجهٔ این کار ثابت باشد، به نظر شما آیا آن را بین همهٔ خانوارها تقسیم کنیم یا بین خانوارهایی که درآمدی کمتر از خط فقر داشته‌اند؟ پاسخ خود را برای خط فقر بین‌المللی نیز بیان کنید.

فرض کنید هدف ما کنترل فقر با شاخص بین‌المللی آن باشد و تصمیم گرفته‌ایم که به خانوارهایی که درآمدی کمتر از خط فقر دارند، یارانه دهیم. آیا با این تصمیم به هدف خود رسیده‌ایم؟ برای پاسخ دقیق‌تر به این سؤال، نیاز به معرفی شاخص دیگری داریم.

در ادامه نمودار پراکنش‌نگاشت **شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی**[1] مناطق شهری ایران در طی ۵ سال متوالی رسم شده است. این شاخص بر اساس متوسط هزینهٔ حدود ۴۰۰ نوع کالا، خوراکی و خدمات برای هر ماه محاسبه می‌شود، که از آن جمله می‌توان به هزینه‌های مسکن، پوشاک، سلامت، غذا، حمل‌ونقل و تحصیل اشاره کرد. البته موارد ذکرشده دارای اهمیت یکسانی در محاسبه نیستند.

این شاخص نسبت به یک سال پایه محاسبه می‌شود، که ارقام ذکر شده در نمودار، درصد تغییرات نسبت به سال پایهٔ ۱۳۹۰ است.[2]



۱ـ CPI: Consumer Price Index

۲ـ شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی، بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران، ۱۳۹۵.

شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی، متوسط مبلغ پرداخت شده از سوی مصرف‌کنندگان برای مجموعه‌ای از تعداد زیادی کالا و خدمت در طول یک سال است. این شاخص، تحولات قیمت را بر مبنای یک سال پایه نشان می‌دهد.

مثال

به عنوان مثال اگر سبد هزینهٔ خانواری در سال پایه از دو کالای نان و گوشت تشکیل شده باشد و قیمت این دو کالا در سال پایه به ترتیب ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰۰ ریال باشد و در سال مورد نظر به ۱۵۰۰ و ۷۰۰۰۰ ریال برسد و با فرض آنکه مقادیر مصرفی نان و گوشت در سال پایه به ترتیب معادل ۲۰۰ و ۸۰ کیلوگرم باشد، برای محاسبهٔ شاخص بهای نان و گوشت در سال مورد نظر به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\text{شاخص بهای نان و گوشت} = \frac{(1500\times200)+(70000\times80)}{(1000\times200)+(50000\times80)}\times100 = \frac{5900000}{4200000}\times100 = 1/405\times100 = 140/5$$

کار در کلاس

۱. در نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات، محور طول‌ها نشان‌دهندهٔ ..... و محور عرض‌ها نشان‌دهندهٔ ..... است.

۲. شاخص بهای کالاها و خدمات به واحد اندازه‌گیری بستگی.....

۳. به نظر می‌رسد افزایش شاخص بهای کالاها و خدمات نشان‌دهندهٔ ..... شدن هزینهٔ اقلام خوراکی و.....است.

۴. شاخص بهای کالاها و خدمات بر اساس تعداد ..... متغیر محاسبه می‌شود.

۵. اهمیت شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟

حال به سؤال قبل باز می‌گردیم. آیا برداخت یارانهٔ ثابت طی سال‌های آتی (مثلاً ۴۵۰۰۰ تومان به ازای هر نفر) می‌تواند در همهٔ این مدت، درآمد خانوار را بیشتر از خط فقر نگه دارد؟

خواندنی

در اقتصاد، یک جریان چرخشیِ پول و کالاها و خدمات و عوامل تولید وجود دارد. به عنوان مثال، وقتی آقای شکوهی به عنوان طراح در یک شرکت سازندهٔ تزیینات داخلی ساختمان کار می‌کند، درآمدی به دست می‌آورَد که می‌تواند آن را برای خرید کالاها و خدمات، خرج کند. آقای شکوهی در طول سال، درآمدش را صرف خرید کالاها و خدمات گوناگونی می‌کند. او وقتی به فروشگاه می‌رود، ۱۰۰ هزار تومان با خود می‌بَرد و مجموعه‌ای از کالاهای مورد نیاز خانواده‌اش را می‌خرد. فرض کنیم خریدهایش اینها باشند : شیر، تخم‌مرغ، برنج، گوشت، چای و شکر. او همچنین بنزین برای خودرو سواری‌اش می‌خرد و هزینهٔ اجارهٔ خانه و قبض آب و برق و گاز و تلفن را می‌پردازد. او در این سال، یک تلویزیون می‌خرد، به یک مسافرت می‌رود، و یک عمل جراحی هم انجام می‌دهد.

هر یک از خانوارها و افراد جامعه در طول سال، هزینه‌هایی این‌چنین دارند. هزینه‌های همهٔ خانوارها در هر سال، شاخصی به‌نام «**شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی** یا **شاخص قیمت مصرف‌کننده**» را می‌سازد که برای کلّ اقتصاد محاسبه می‌شود. این شاخص، سطح قیمت‌ها در یک سال را اندازه می‌گیرد.

شاخص بهای کالاها و خدمات نشان می‌دهد که با پولمان چقدر می‌توانیم خرید کنیم، یا به‌اصطلاح، «**قدرت خرید**» پولمان چه‌قدر است. هرچه قیمت‌ها افزایش یابند، «قدرت خرید» پولمان کاهش می‌یابد.

آقای شکوهی در سال بعد نیز به فروشگاه می‌رود و همان مبلغ ۱۰۰ هزار تومان را خرج می‌کند. او متوجّه می‌شود که این بار نمی‌تواند همهٔ کالاهای قبلی را با همان ۱۰۰ هزار تومان بخرد. علّت این موضوع، افزایش قیمت کالاها و خدمات در طول زمان است. در واقع، «**هزینهٔ زندگی**» او افزایش یافته است. او نه تنها وقتی که به فروشگاه می‌رود، باید پول بیشتری بپردازد، بلکه برای پر کردن باک بنزین خودرو یا برای یک شب اقامت در شهری دیگر باید پول بیشتری بپردازد.

تغییر متوسط قیمت کالاها و خدمات در طول زمان را **تورّم** می‌نامند.

تورّم، یکی از مهم‌ترین مفاهیم اقتصادی است که شما به‌آسانی می‌توانید درک کنید. تورّم بر زندگی تک‌تک ما اثرگذار است. اقتصاددانان و آماردانان با کمک یکدیگر، میزان تورّم یا تغییرات سطح قیمت‌ها را با استفاده از «شاخص بهای کالاها و خدمات» محاسبه می‌کنند. برای این کار، شاخص بهای کالاها و خدمات یک سال را با سال‌های قبل مقایسه می‌کنند. به نظر شما رابطهٔ بین تورّم و شاخص بهای کالاها و خدمات چیست؟

از تفاضل شاخص در سال مورد نظر و شاخص در سال پایه، افزایش قیمت‌ها به درصد در فاصلهٔ بین سال پایه و سال مورد نظر به دست می‌آید، که به آن نرخ تورّم می‌گویند. برای مثال قبل، نرخ تورّم به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

[(شاخص بهای گوشت و نان در سال مورد نظر) − (شاخص بهای گوشت و نان در سال پایه)] = ۱۴۰/۵ − ۱۰۰ = ۴۰/۵٪ نرخ تورّم

کار در کلاس

از مدرسه به خانه برمی‌گشتم و داشتم از کنار دکهٔ روزنامه‌فروشی رد می‌شدم که جملهٔ درشت یکی از روزنامه‌ها نظرم را جلب کرد : «درصورتی‌که رشد اقتصاد سالانه یک درصد باشد، در سال ۱۴۰۰ نرخ (شاخص) بیکاری تحصیل‌کردگان آموزش عالی به ۴۸ درصد خواهد رسید».

با خودم گفتم پس در زمانی که ما قرار است شاغل شویم، احتمالِ یافتن شغل، پنجاه ــ پنجاه است. تا به حال به این مسئله توجه نکرده بودم و فکر می‌کردم اگر درس بخوانم، شغل خوبی خواهم داشت و می‌پنداشتم درس خواندن سخت است! اما نسبت به کار پیدا کردن خیلی راحت‌تر است.

این جمله را با معلم درس آمار در میان گذاشتم. او گفت : **نرخ بیکاری عبارت است از نسبت جمعیت بیکار به جمعیت فعال**. این نرخ با رشد اقتصادی پنج درصد نیز محاسبه شده و اگر رشد اقتصادی ۵ درصد برای کشور به دست آید، نرخ بیکاری تحصیل‌کردگان به ۳۶ درصد می‌رسد. سپس او با یک توضیح و چند سؤال، نظرم را دربارهٔ همهٔ ماجرا عوض کرد.

بیکار به فردی بالای ۱۶ سال می‌گویند که به‌طور موقت بیکار شده یا در جست‌وجوی شغل باشد یا منتظر شروع یک کار جدید از تاریخ مشخّصی باشد. این تعریف برای تمام کشورها یکسان است.

به نظر شما آیا شاخص بیکاری برای چهار زیرگروه رشته‌های تحصیلی یکسان است؟ در هر رشته چطور؟

تمرین

۱. اگر میانگین درآمد خانوارهای کشور ۳۵ میلیون ریال باشد، حداقل حقوق دریافتی کارکنان یک شرکت چه‌قدر باشد تا هیچ کارمندی در آن شرکت زیر خط فقر نباشد؟ چه زمانی از میانهٔ درآمد خانوارها برای محاسبهٔ خط فقر استفاده می‌کنیم؟

۲. خانواده‌ای شش نفره در یکی از کشورهای در حال توسعه زندگی می‌کنند. با توجه به تعریف خط فقر بین‌المللی، درآمد ماهانهٔ این خانواده باید چند دلار باشد تا زیر خط فقر نباشند؟

۳. در یک منطقه ۱۲۰۰ نفر از افراد ۱۶ ساله و بیشتر شاغل‌اند. در این منطقه ۲۰۰ نفر ۱۶ ساله و بیشتر جویای کار می‌باشند.

الف) نرخ بیکاری در این منطقه چه‌قدر است؟

ب) حداقل چند شغل در این منطقه باید ایجاد شود تا نرخ بیکاری منطقه برابر با ۵ درصد باشد؟

۴. خانوادهٔ آقای صالحی در ماه فروردین سال ۱۳۹۰، پانصد هزارتومان هزینهٔ ماهانهٔ مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌ها داشته است. در همان تاریخ، هزینهٔ ماهانهٔ خوراکی‌ها و آشامیدنی‌های این خانواده دویست و پنجاه هزارتومان بوده است. اگر تعداد افراد این خانواده تغییری نکرده باشد، بر مبنای نمودار شاخص بهای کالا و خدمات مصرفی موارد زیر را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.

الف) هزینهٔ ماهانهٔ مسکن، آب، برق، گاز و سایر سوخت‌های این خانواده در خردادماه ۱۳۹۳

ب) هزینهٔ ماهانهٔ خوراکی‌ها و آشامیدنی‌های این خانواده در مهرماه ۱۳۹۵

۵. نماتوپ یا شاخص تودهٔ بدنی که در سال گذشته آن را در کتاب ریاضی و آمار خود دیدید، یکی دیگر از شاخص‌های مهم آماری است که به شاخص سلامت معروف است. برای محاسبهٔ آن باید وزن فرد به کیلوگرم را بر توان دوم قدش بر حسب متر تقسیم کرد.

جدول زیر، اطلاعات خانوادهٔ صالحی را نشان می‌دهد.

عضو خانواده	سن (سال)	وزن (کیلوگرم)	قد (سانتی‌متر)
صالح	۱۷	۶۲	۱۷۷
برادر	۲۲	۸۵	۱۸۳
خواهر	۲۵	۵۳	۱۷۰
مادر	۵۰	۶۰	۱۶۵
پدر	۵۵	۸۱	۱۷۴

اکنون با توجه به جدول بالا مشخص کنید کدام یک از افراد این خانواده وزن مطلوبی دارد؟

۶. در موقع خرید کتاب‌های داستان، معمولاً به ردهٔ سنی آن توجه می‌کنیم. به نظر شما ردهٔ سنی را چگونه تعیین می‌کنند؟ آیا نظر همهٔ افراد با تجربه دربارهٔ سطح یک متن بخصوص، یکسان است؟ ارزیابی آنها کیفی است یا کمّی؟

درجهٔ خوانایی متن، میزان سهولت درک متن از طریق انتخاب واژه‌های مناسب و رعایت قواعد نگارش است.

یکی از شاخص‌های خوانایی که سال‌های تحصیل خوانندهٔ متون انگلیسی را تخمین می‌زند، به‌صورت زیر تعریف شده است.

شاخص پایهٔ آموزش = [۰/۴ ×(میانگین تعداد کلمات در هر جمله + درصد کلمات «دشوار»)]

که منظور از کلمات «دشوار» کلمات دو هجایی بدون در نظر گرفتن اسامی و کلمات آسان است. این شاخص عددی از ۱ تا ۱۲ است که نشان‌دهندهٔ پایهٔ تحصیلی است.

الف) برای کتابی با متوسط طول جمله‌های ۸ کلمه‌ای و ۲۰ درصد کلمهٔ دشوار، شاخص پایهٔ آموزش را محاسبه کنید. این کتاب، برای دانش‌آموزان چه پایه‌ای مناسب است؟

پاسخ : این کتاب برای دانش‌آموزانی مناسب است که پایهٔ ..... را به پایان رسانده‌اند.

ب) مزایا و محدودیت‌های این شاخص چیست؟

پاسخ : استفاده از این شاخص، آسان است. با این حال، فرض می‌کند که کلمات بزرگ‌تر و جمله‌های طولانی‌تر باعث .... شدن متن می‌شوند، اما یک نویسندهٔ چیره‌دست می‌تواند با کلمات و جمله‌های دیگری باعث ..... متن شود.

پ) همان‌گونه که متوجه شده‌اید، این شاخص بر اساس دو آمار از دو متغیر تعریف شده است. آنها را نام ببرید.

۷. هزینه‌های زندگی خانوادهٔ آقای صالحی در سال ۱۳۹۰ در جدول زیر آمده است. با توجه به نمودار شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی، جدول زیر را کامل کنید.

	۱۳۹۰	مهر ماه ۱۳۹۳	دی‌ماه ۱۳۹۶
هزینهٔ خوراکی‌ها و آشامیدنی‌ها (برحسب هزار تومان)	۲۱۰	$\frac{۲۱۰\times۲۲۵}{۱۰۰}=۴۷۲/۵۰$	
هزینهٔ کل (برحسب هزار تومان)	۸۵۰	$\frac{\cdots\cdots\times۲۰۲}{۱۰۰}=\cdots\cdots$	

۸. شاخص پوسیدگی دندان (DMFT) در سال ۱۳۶۰ در ایران برابر با ۳ بوده است؛ یعنی هر ایرانی به طور متوسط دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان پوسیده و یک دندان پُر شده است. این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر با ۶ شده است. شاخص در سال ۱۳۹۵ چند درصد افزایش داشته است؟ این شاخص در سال ۱۳۶۰ نسبت به سال ۱۳۹۵ چند درصد کاهش داشته است؟

درس ۲

سری‌های زمانی

به نظر شما دستیابی به کدام یک از اطلاعات زیر جالب‌تر است؟

دمای هوای شهر محل زندگی ما در هفتهٔ آینده

میزان آلاینده‌های شهر محل زندگی ما در ماه آینده

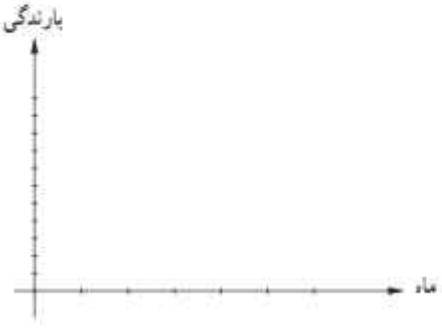
نرخ بیکاری در زمان اخذ دیپلم

به نظر شما آیا مجموعه‌ای از داده‌های آماری که در فواصل زمانی مساوی و منظم گردآوری شده باشند، می‌تواند ابزار خوبی برای تصمیم‌گیری ما باشد؟

فعالیت

میزان بارندگی در شش ماه دوم سال دو شهر «آ» و «ب» برحسب میلی‌متر در جدول زیر آمده است.

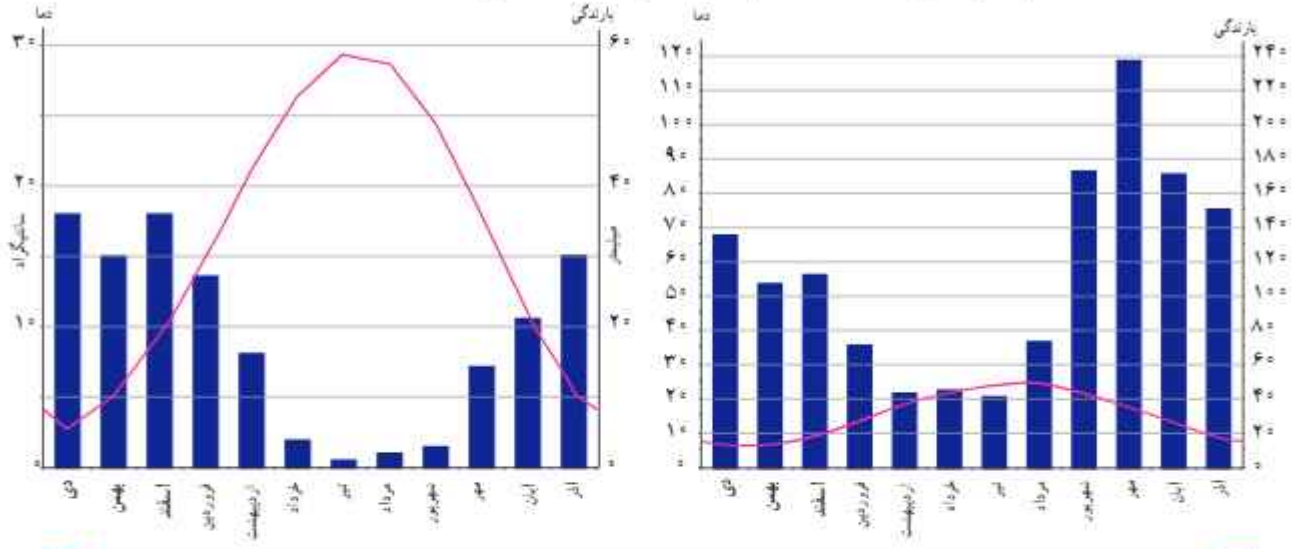
	مهر	آبان	آذر	دی	بهمن	اسفند	مجموع	میانگین	انحراف معیار
شهر «آ»	۱۵	۲۰	۳۰	۳۵	۳۰	۳۰			
شهر «ب»	۲۳۰	۱۷۰	۱۵۰	۱۳۰	۱۱۰	۱۱۰			



- جدول را کامل کنید.
- میانگین و انحراف معیار بارندگی در شهرها را مقایسه کنید.
- نمودار پراکنش‌نگاشت میزان بارندگی هر دو شهر را برحسب ماه‌های سال با یک مقیاس بر روی یک محور رسم کنید. نقاط را به هم وصل کنید. برای مشخص شدن هر شهر از یک رنگ متفاوت استفاده کنید.
- کدام شهر میزان بارندگی بیشتری در پاییز نسبت به زمستان دارد؟

حال نمودار پراکنش‌نگاشت **دما** و نمودار میله‌ای بارندگی‌های همان دو شهر را با مقیاس‌های متفاوت برای یک سال خاص در یک محور رسم کرده‌ایم.

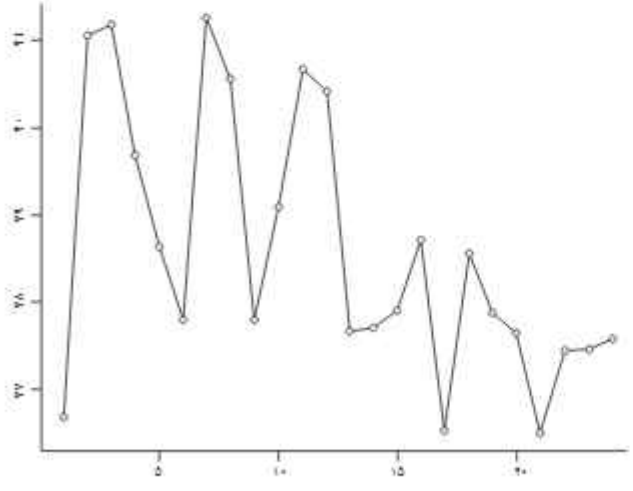
- درچه فصلی از سال، بارندگی بیشتر است؟
- متوسط دمای کدام شهر کمتر است؟ آیا در تمام ماه‌های سال، دمای آن کمتر است؟



سری زمانی : مجموعه داده‌هایی که در طی زمان با فواصل منظم گردآوری می‌شوند.
نمودار سری زمانی : پراکنش‌نگاشت سری زمانی که نقاط مشاهده‌شده را با پاره‌خط‌هایی در طول زمان به هم متصل می‌کند.

کار در کلاس

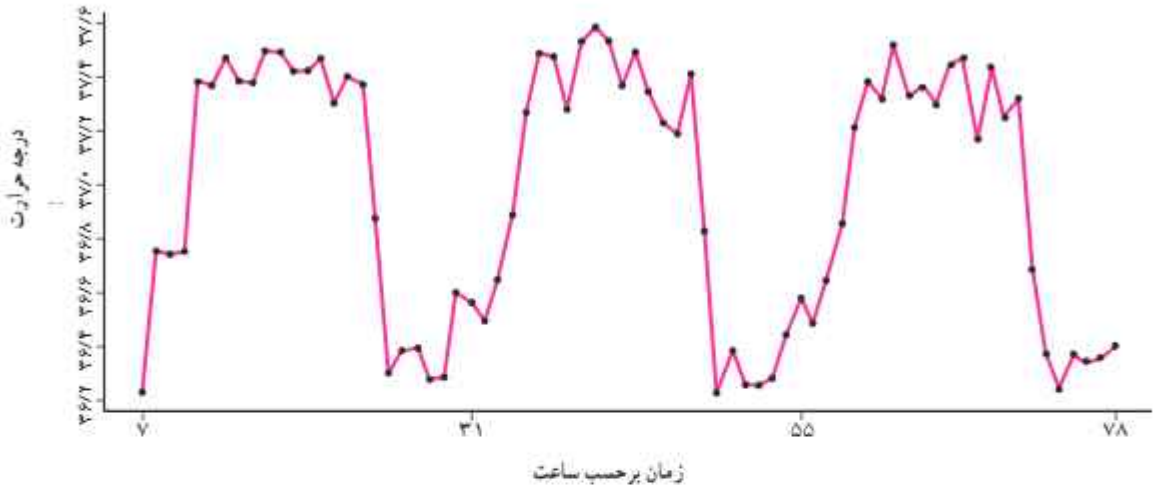
سری زمانی روبه‌رو، نشان‌دهندهٔ ۶ روز دمای بدن یک بیمار مبتلا به بیماری میکروبی است. او بستری شده و درمانش با آنتی‌بیوتیک آغاز شده است.



- هر روز چند بار دمای خوانده شده ثبت شده است؟
- دمای بدن بیمار در لحظهٔ بستری شدن چند درجه است؟
- دمای بدن بیمار پس از چند روز به حالت طبیعی بازگشته است؟
- اگر اولین زمان ثبت دما، ساعت ۷ صبح باشد، نمودار را فقط برای ساعات ۷ صبح رسم کنید. کدام نمودار ساده‌تر به نظر می‌رسد؟ کدام‌یک جزئیات بیشتری را نشان می‌دهد؟

فعالیت

دمای بدن یک انسان سالم در هر ساعت، طی ۳ روز از ساعت ۷ صبح اندازه‌گیری و در نمودار زیر ارائه شده است.



- بیشترین دمای بدن چه‌قدر است؟
- دمای بدن در طول روز اول چه تغییراتی کرده است؟ تغییرات دمای بدن در روز اول را توصیف کنید.
- آیا این تغییرات در روزهای بعد نیز تکرار شده است؟
- این منحنی چه ویژگی‌ای دارد؟ (خطی، صعودی یا تناوبی)

خواندنی

معادلهٔ منحنی دمای بدن انسان سالم در طی روز تقریباً به‌صورت زیر است :

$y = ۵\,((۱/۸ \sin^{۳}((\pi/۱۲)x - (\pi/۲)) + ۹۸/۶) - ۳۲)/۹$

که مقدار $x = ۰$ دمای بدن در ساعت ۱۲ ظهر است.

تکرار یک ویژگی در سری زمانی را **الگو** می‌نامند. بازشناسی الگو به ما کمک می‌کند که چنین معادله‌هایی را برای پدیده‌های طبیعی بیابیم.

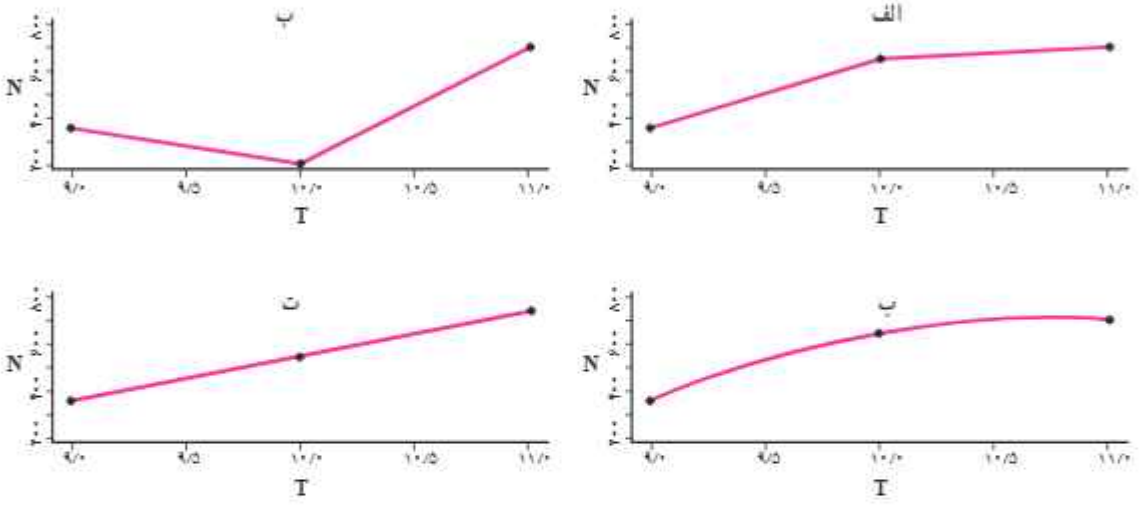
فعالیت

در یک مرکز خرید، تعداد مشتری‌ها از ساعت ۹ تا ۲۱ به‌صورت زیر ثبت شده است.

ساعت (T)	۲۱	۱۹	۱۷	۱۵	۱۳	۱۱	۹
تعداد مشتری (N)	۲۵۰	۵۰۰	۳۰۰	۶۵۰	۸۰۰	۷۵۰	۳۵۰

نمودار سری زمانی را رسم کنید.

می‌خواهیم تعداد مشتری‌های ساعت ۱۰ را حدس بزنیم. به نظر شما کدام‌یک از نمودارهای زیر واقعی‌تر است؟



اگر فرض کنیم تعداد مشتری‌ها در فاصلهٔ زمانی ۹ تا ۱۱ به‌صورت یکنواخت تغییر کرده است، به سؤال قبل پاسخ دهید.

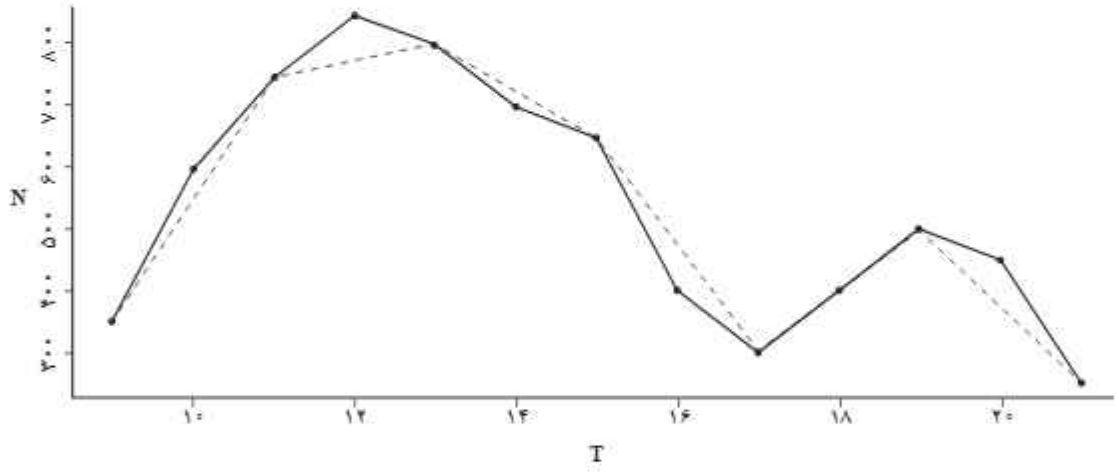
درون‌یابی تخمین مقادیر بین داده‌های ثبت شده است.

نمودار متوسط وزن نوزادان پسر و دختر یک ساله تا سه ساله

کار در کلاس

می‌خواهیم تعداد مشتریان ساعت ۱۰ در فعالیت قبل را درون‌یابی کنیم. فرض می‌کنیم تعداد مشتری‌ها در فاصلهٔ زمانی ۹ تا ۱۱ به‌صورت یکنواخت تغییر کرده است.

- معادلهٔ خط گذرنده از دو ساعت (۹,۳۵۰) و (۱۱,۷۵۰) را به‌دست آورید.
- خط را رسم کنید.
- مقدار این خط در ساعت ۱۰ چه‌قدر است؟
- این مقدار به کدام‌یک از شکل‌های فعالیت قبل نزدیک‌تر است؟
- اگر مقادیر داده‌های واقعی را به‌صورت ساعتی جمع‌آوری کرده باشیم که در شکل زیر با خط توپر نشان داده شده است، خطای درون‌یابی ساعت ۱۰ چه‌قدر است؟ N نشان‌دهندهٔ تعداد مشتری‌ها و T نشان‌دهندهٔ زمان است (خطا برای هر نقطه برابر است با قدر مطلق تفاضل مقدار واقعی هر نقطه و درون‌یابی آن).
- خطای درون‌یابی بقیهٔ نقاط را از روی شکل محاسبه کنید.



درون‌یابی‌ای که به‌وسیلهٔ یک پاره‌خط انجام شود، **درون‌یابی خطی** است.

فعالیت

میزان فروش یک شرکت در ۵ سال متوالی برحسب میلیارد ریال به‌صورت زیر است

سال (x)	۵	۴	۳	۲	۱
فروش (y)	۱۹	۱۵	۱۱	۹	۶

- نمودار سری زمانی را رسم کنید.
- فروش در سال هفتم را حدس بزنید.
- میانگین سال و فروش را محاسبه کنید و روی نمودار نمایش دهید.
- یک خط از نقطهٔ میانگین‌ها به نقطه (۵,۱۹) وصل کنید.
- معادلهٔ خط را به دست آورید.
- اگر به‌جای x در معادله، مقدار ۶ قرار دهید، عدد به دست آمده چه‌قدر است؟ آیا می‌توان این مقدار را به‌عنوان تخمین فروش در سال آینده تصور کرد؟

برون‌یابی تخمین داده‌های بعد یا قبل از داده‌های ثبت شده است.

در فعالیت قبل، مقدار عدد به دست آمده در سال ششم، برون‌یابی مقدار فروش است.

تمرین

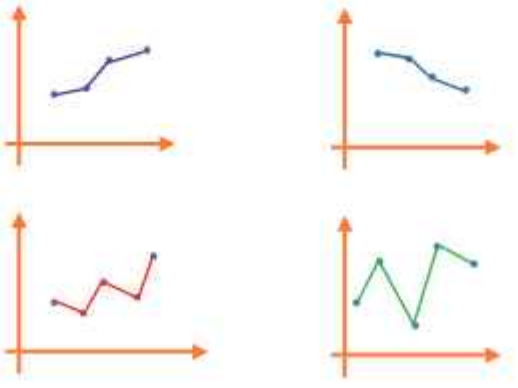
۱ــ کدام‌یک از داده‌های زیر، سری زمانی است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) تعداد مسافران فرودگاه بوشهر در هر ماه در ۱۰ سال گذشته

ب) تعداد مشتریان یک تاجر برحسب مدت زمانی که صرف بازاریابی می‌کند.

پ) تعداد ساعاتی که در معرض نور مستقیم خورشید قرار داریم؛ شدت آفتاب سوختگی.

۲ــ اگر نمودارهای شکل زیر، مربوط به سری‌های زمانی باشند، در کدام حالت، درون‌یابی و برون‌یابی خطی بهتری امکان‌پذیر است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



۳ــ یک دکه‌دار تعداد بطری‌های آب فروخته‌شده، از شروع فصل گرما را یک روز در میان، مطابق با جدول زیر ثبت کرده است :

روز	شنبه	دوشنبه	چهارشنبه	جمعه	یکشنبه	سه‌شنبه	پنجشنبه	شنبه
تعداد بطری‌ها	۸	۱۳	۱۶	۲۵	۱۸	۲۲	۲۱	۲۳

الف) نمودار سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب) تعداد بطری‌های فروخته‌شده در روزهای فرد را درون‌یابی کنید.

پ) تعداد بطری‌های فروخته‌شده در روز دوشنبه از هفتهٔ دوم را برون‌یابی کنید.

۴ــ تعداد گل‌های زده شده در لیگ برتر فوتبال (جام خلیج فارس) در هفته‌های زوج و پایانی در جدول زیر آمده است.

هفته	۲۰	۲۲	۲۴	۲۶	۲۸
تعداد گل‌ها	۳۰	۲۷	۳۲	۳۵	۳۵

نمودار سری زمانی مربوط به آن را رسم کنید. تعداد گل‌های هفتهٔ سی‌ام را برون‌یابی کنید.

۵ــ میانگین افزایش خدمات یک تعمیرگاه نسبت به سال اول (سال پایه) برحسب درصد در جدول زیر آمده است.

سال	۱	۲	۳	۴	۵	۶
درآمد	۱۹/۵	۲۹	۳۸/۵	۴۸	۵۸	۶۷

الف) نمودار سری زمانی داده‌ها را رسم کنید.

ب) درصد افزایش خدمات سال هفتم این تعمیرگاه را نسبت به سال پایه، برون‌یابی کنید.

۶ــ تعداد زلزله‌های دارای شدّت بیش از ۷ ریشتر در جهان، مطابق جدول زیر برای ده سال ثبت شده است.

سال	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
تعداد زلزله‌های شدیدتر از ۷ ریشتر	۳۰	۲۸	۲۹	۲۳	۲۰	۱۶	۲۱	۲۵	۱۶	۲۱

الف) نمودار سری زمانی آن را رسم کنید.

ب) میانگین سال و تعداد زلزله‌ها را به دست آورید.

پ) معادلهٔ خطی را که نقطه (۲۱و۱۰) را به میانگین سال و تعداد زلزله‌ها وصل می‌کند، به دست آورید.

ت) با استفاده از خطی که معادلهٔ آن را به دست آورده‌اید، تعداد زلزله‌های شدیدتر از ۷ ریشتر در سال یازدهم در جهان را برون‌یابی کنید.

ث) اگر بدانیم که در سال یازدهم دقیقاً ۲۵ زلزله آمده است، خطای برون‌یابی چه‌قدر است؟

۷ــ نرخ تورم در ایران طی سال‌های ۱۳۱۶ تا ۱۳۹۵ در جدول صفحهٔ بعد داده شده است.

الف) نمودار سری زمانی داده‌های ده سال به ده سال را رسم کنید.

ب) داده‌ها را با استفاده از قسمت قبل درون‌یابی کنید.

پ) بر روی همان سری زمانی، داده‌های پنج سال به پنج سال را با استفاده از جدول برروی همان نمودار رسم و خطای درون‌یابی را محاسبه کنید.

سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم	سال	نرخ تورم
۱۳۸۶	۱۸/۴	۱۳۷۶	۱۷/۳	۱۳۶۶	۲۷/۷	۱۳۵۶	۲۵/۱	۱۳۴۶	۰/۸	۱۳۳۶	۴/۴	۱۳۲۶	۶/۶	۱۳۱۶	۲۱/۲
۱۳۸۷	۲۵/۴	۱۳۷۷	۱۸/۱	۱۳۶۷	۲۸/۹	۱۳۵۷	۱۰/۰	۱۳۴۷	۱/۵	۱۳۳۷	۱/۰	۱۳۲۷	۱۱/۱	۱۳۱۷	۸/۸
۱۳۸۸	۱۰/۸	۱۳۷۸	۲۰/۱	۱۳۶۸	۱۷/۴	۱۳۵۸	۱۱/۴	۱۳۴۸	۳/۶	۱۳۳۸	۱۳/۰	۱۳۲۸	۲/۳	۱۳۱۸	۸/۰
۱۳۸۹	۱۲/۴	۱۳۷۹	۱۲/۶	۱۳۶۹	۹/۰	۱۳۵۹	۲۳/۵	۱۳۴۹	۱/۵	۱۳۳۹	۷/۹	۱۳۲۹	-۱۷/۲	۱۳۱۹	۱۳/۸
۱۳۹۰	۲۱/۵	۱۳۸۰	۱۱/۴	۱۳۷۰	۲۰/۷	۱۳۶۰	۲۲/۸	۱۳۵۰	۵/۵	۱۳۴۰	۱/۶	۱۳۳۰	۸/۳	۱۳۲۰	۴۹/۵
۱۳۹۱	۳۰/۵	۱۳۸۱	۱۵/۸	۱۳۷۱	۲۴/۴	۱۳۶۱	۱۹/۲	۱۳۵۱	۶/۳	۱۳۴۱	۰/۹	۱۳۳۱	۷/۲	۱۳۲۱	۹۶/۲
۱۳۹۲	۳۴/۷	۱۳۸۲	۱۵/۶	۱۳۷۲	۲۲/۹	۱۳۶۲	۱۴/۸	۱۳۵۲	۱۱/۲	۱۳۴۲	۱/۰	۱۳۳۲	۹/۲	۱۳۲۲	۱۱۰/۵
۱۳۹۳	۱۵/۶	۱۳۸۳	۱۵/۲	۱۳۷۳	۳۵/۲	۱۳۶۳	۱۰/۴	۱۳۵۳	۱۵/۵	۱۳۴۳	۴/۵	۱۳۳۳	۱۵/۹	۱۳۲۳	۲/۷
۱۳۹۴	۱۱/۹	۱۳۸۴	۱۰/۴	۱۳۷۴	۴۹/۴	۱۳۶۴	۶/۹	۱۳۵۴	۹/۹	۱۳۴۴	۰/۳	۱۳۳۴	۱/۷	۱۳۲۴	-۱۴/۴
۱۳۹۵	۹	۱۳۸۵	۱۱/۹	۱۳۷۵	۲۳/۲	۱۳۶۵	۲۳/۷	۱۳۵۵	۱۶/۶	۱۳۴۵	۰/۸	۱۳۳۵	۸/۸	۱۳۲۵	-۱۱/۵

منابع

۱ــ هاک، سوزان. **فلسفه منطق**، (ترجمه : سید محمد علی حجتی)، انتشارات طه، ۱۳۸۳.

۲ــ امیری، حمیدرضا، ایلخانی‌پور، یدالله. **مبانی ریاضیات گسسته**. انتشارات مدرسه، ۱۳۸۸.

۳ــ سام، لوید. **معماها و سرگرمی‌های ریاضی**، (ترجمه : کاظم فائقی)، انتشارات امید یزدانی، ۱۳۶۴.

۴ــ ایگل ویتس، بوریس، استریل، جودیت. **مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی**، (ترجمه : غلامرضا یاسی‌پور)، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۶

۵ــ شهریاری، پرویز و همکاران، **دانشنامه ریاضی**، انتشارات کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۹۲.

۶ــ Canton, B. **Mathematics of Data Management**, Mc Graw – Hill, 2002.

۷ــ Ministry of Education. **Mathematical Development 5.3**, Austed Publishing, Western Australia,1990.

۸ــ Smith, P. **An Introduction to Godel's Theorems**, Cambridge University Press, 2013.

۹ــ Nickerson, R.S. **Mathematical Reasoning: Patterns, problems, conjectures, and proofs**, Psychology press, 2010.

۱۰ــ Henriksen M. **What is Godel's theorem**, Scientific American, January 1999.

بسمه تعالی

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی، مشارکت معلمان را به‌عنوان سیاست اجرایی مهم دنبال می‌نماید. برای تحقق این امر با بهره‌مندی هوشمندانه از فرصت‌های فناوری‌های نوین در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی برخط اعتبارسنجی کتاب‌های نونگاشت راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نونگاشت کیفیت تولیدات سازمان را بهبود بخشیده و محتوای کتاب‌های درسی را در اولین چاپ سباری با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب فرآیند اعتبارسنجی همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی، گروه های آموزشی، دبیرخانه راهبری دروس در استان‌ها ، شورای هماهنگی تألیف دفاتر، دبیرخانه پروژه اعتبارسنجی سازمان در هماهنگی و اجرا، نقش سازنده‌ای را داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش همکاران شرکت‌کننده در فرآیند اعتبارسنجی، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌نماید.

محسن باهو

مشاور معاون وزیر و مدیر پروژه اعتبارسنجی

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضی و آمار (۲) کد ۱۱۱۲۱۲

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	عباس اسدی قلعه رشیدی	چهار محال و بختیاری	۱۵	مرضیه شریف زاد	ایلام
۲	اکرم سلامی	آذربایجان شرقی	۱۶	لیلا صبوری	فارس
۳	سهیلا چناری	کرمانشاه	۱۷	ایوب خلیلیان گل سفیدی	چهارمحال وبختیاری
۴	جواد کاوانلویی	خراسان شمالی	۱۸	تهمینه امیر خسروی	کرمان
۵	فاطمه عمویی	شهرتهران	۱۹	نذهت دانش	کرمان
۶	ساره ماه‌گلی	خراسان جنوبی	۲۰	عبداللطیف حسین پور	هرمزگان
۷	پروین طالب حسامی آذر	کردستان	۲۱	جمال ثوین	یزد
۸	جواد راشدی	خراسان جنوبی	۲۲	گل بخت دهواری ناگان	سیستان و بلوچستان
۹	معصومه رجب پور	همدان	۲۳	طاهره دانش شکیب	گیلان
۱۰	مهری میرحاج	سمنان	۲۴	زهرا ملتمس	شهرستان‌های تهران
۱۱	اکبر رضائی پور	قزوین	۲۵	فریدون حسنی شیروان شاهی	آذربایجان غربی
۱۲	منور صفائی	سمنان	۲۶	علی مهرنیا	آذربایجان شرقی
۱۳	وحیده سلیمانی	گلستان	۲۷	رحیم بردیده	مازندران
۱۴	شهره رنجبران	همدان	۲۸	نرجس زنگارکی	مرکزی