بسم الله الرحمن الرحیم

اللهم صل علی محمد و آل محمد و عجل فرجهم

ریاضی و آمار (۱)

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی ـ علوم و معارف اسلامی

پایهٔ دهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضی و آمار (۱) ـ پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۰۲۱۲

پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، طیبه حمزه‌بیگی، خسرو داودی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفی‌نیا، اکرم قایل رحمت و محمد مقاصدی (اعضای شورای برنامه‌ریزی)

حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، آزاده حسین قرزان، میرشهرام صدر، حسین میرزایی و عادل محمدپور و با همکاری فرشید خان زاده در بخش آمار (اعضای گروه تألیف) ـ سیّداکبر میرجعفری (ویراستار ادبی)

مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ مجید ذاکری یونسی (مدیر هنری) ـ شاهرخ خرم‌غالی (طراح گرافیک، طراح جلد و صفحه‌آرا) ـ بهتام خیامی و امیر نساجی (تصویرگر) ـ فرزانه پورسیفی (رسام) ـ محسن خرم‌غالی (عکاس) ـ کبری اجایتی، نوشین معصوم‌دوست، فرشته ارجمند، فاطمه پزشکی و حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده‌سازی)

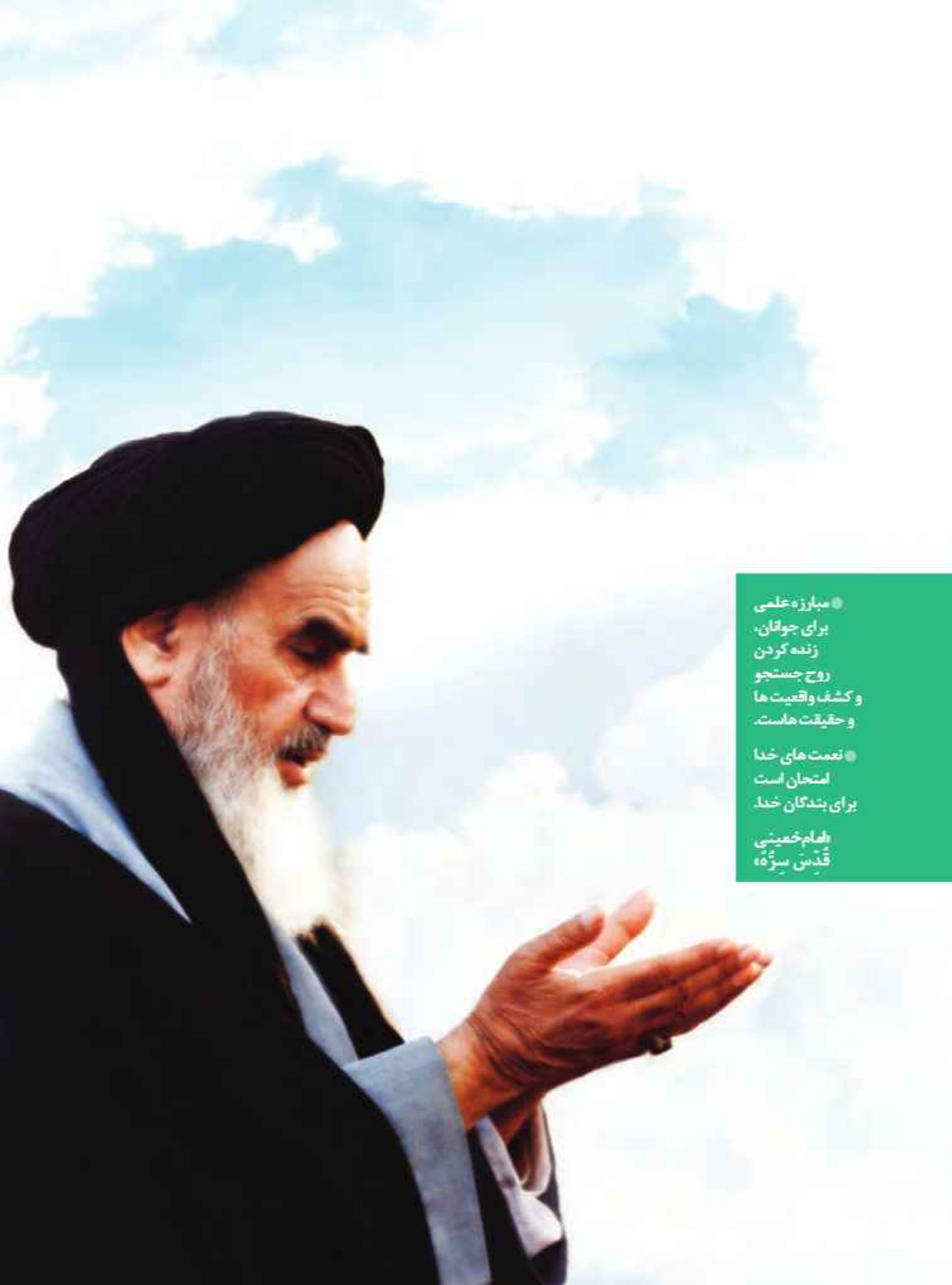
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱ دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir

ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (دارویخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ نهم ۱۴۰۳

شابک ۹۷۸ـ۹۶۴ـ۰۵ـ۲۵۰۳ـ۶
ISBN: 978_964_05_2503_6



- مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیت ها و حقیقت هاست.
- نعمت های خدا امتحان است برای بندگان خدا.

«امام خمینی قُدِّسَ سِرُّهُ»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به‌صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند

فهرست

ریاضی

فصل اوّل

معادلهٔ درجهٔ دوم ۹

درس۱ معادله و مسائل توصیفی ۱۰

درس۲ حل معادلهٔ درجهٔ ۲ و کاربردها ۱۹

درس۳ معادله‌های شامل عبارت‌های گویا ۳۳

فصل دوم

تابع ۳۹

درس۱ مفهوم تابع ۴۰

درس۲ ضابطهٔ جبری تابع ۵۰

درس۳ نمودار تابع خطی ۵۶

درس٤ نمودار تابع درجهٔ ۲ ۶۳

فهرست

آمار

فصل سوم **کار با داده‌های آماری** ۷۱

درس ۱ گردآوری داده‌ها ۷۲

درس ۲ معیارهای گرایش به مرکز ۸۵

درس ۳ معیارهای پراکندگی ۸۹

فصل چهارم **نمایش داده‌ها** ۹۹

درس ۱ نمودارهای یک‌متغیره ۱۰۰

درس ۲ نمودارهای چندمتغیره ۱۱۰

منابع ۱۱۸

سخنی با معلّم

کتاب ریاضی و آمار پایهٔ دهم رشتهٔ انسانی در جهت اهداف برنامهٔ درسی ملّی و در ادامهٔ تغییر کتاب‌های درسی دورهٔ اول متوسطه تألیف شده است. زمانی تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام دادن محاسبات بود. در رویکرد جدید، ضمن توجّه به این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوّهٔ تفکّر و تعقّل و رشد توانایی حلّ مسئله است. در واقع رویکرد «آموزش ریاضی برای حل مسئله» به «آموزش از طریق حل مسئله» تغییر کرده است. رسیدن به چنین هدفی، مشکلات و دشواری‌های فراوانی دارد و به سرعت امکان‌پذیر نیست ولی مدّنظر قرار دادن آن می‌تواند جهت اصلی حرکت جامعهٔ آموزش ریاضی را تعیین کند. در این میان، اصلی‌ترین و مؤثرترین وظیفه بر عهدهٔ معلّم قرار دارد. قدرت انعطاف و هماهنگی و همراهی معلّمان با برنامه‌های جدید ستودنی است. بر این اساس، مؤلفان کتاب حاضر سعی کرده‌اند برای انجام وظیفهٔ خویش در مورد آموزش معلّمان، ضمن اطّلاع‌رسانیِ مناسب و به‌هنگام دربارهٔ تألیف، کتاب راهنمای معلّم و نیز فیلم‌های آموزشی مربوط را به‌موقع در اختیار همکاران عزیز قرار دهند.

ساختار کتاب حاضر از سه بخش اصلیِ «فعّالیت»، «کار در کلاس» و «تمرین» و نیز مثال‌های حل‌شده و توضیحات به‌صورت متنی، نکات مهم و تعاریف، تشکیل شده است. آنچه در هر «فعّالیت» به‌طور عمده مدّنظر بوده آشنایی دانش‌آموزان با مفهوم درس و سهیم بودن او در ساختن دانش موردنظر است. فعّالیت‌ها شامل مراحلی مانند درک کردن، کشف کردن، حلّ مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح راه حل، مرتّب کردن، قضاوت در مورد یک راه حل و مقایسهٔ راه‌حل‌های مختلف است. هدایت فعّالیت‌ها ساده و آسان نیست و صد البتّه، اجرای مناسب آن ارزش زیادی دارد. فعّالیت‌ها در حدّ متوسّط طرّاحی شده‌اند؛ بنابراین معلّم می‌تواند با توجّه به زمان و توانایی دانش‌آموزان خود، یک فعّالیت را غنی‌تر کند یا با ارائهٔ توضیحات بیشتر و ایجاد تغییراتی، آن‌را ساده‌تر نماید و حتی فعّالیتی مکمل در جهت آموزش همان مفهوم درسی طراحی کند.

مؤلفان در کتاب ریاضی و آمار (۱) بر این باورند که استفاده از مثال‌ها و مسائل کاربردی که رابطه‌ای با شاخه‌های مختلف رشتهٔ علوم انسانی داشته باشد می‌تواند علاوه بر ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان

برای یادگیری ریاضی و آمار به پرورش تفکّر ریاضی در آنها کمک کرده طوری که در مواجهه با مسائل و مشکلات روزمره از این ذهنیت استفاده لازم را برده و در آینده افرادی خلّاق، متفکّر و با قدرتِ تجزیه و تحلیل و دلسوز برای خدمت به جامعه و ایران اسلامی تربیت شوند.

هنگام انجام دادن فعّالیت، هدایت گفت‌وگوی کلاسی یا گفتمان ریاضی، که در آن دانش‌آموزان به ارائهٔ دیدگاه‌ها و دفاع از اندیشه‌های خود و نیز قضاوت و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانش‌آموزان می‌پردازند، به عهده معلّم است. به طور خلاصه، فراهم کردن موقعیت‌های یادگیری و فرصت دادن به دانش‌آموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دل‌مشغولی‌های همکاران عزیزمان باشد. «کار در کلاس» با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی، تعمیم یادگیری طرّاحی شده و انتظار این است که دانش‌آموزان بیشترین سهم را در انجام آن داشته باشند. مثال‌ها توسط همکاران محترم در کلاس بررسی شده و سعی می‌شود تا همانند کار در کلاس‌ها دانش‌آموزان به حل و بررسی آنها مشغول باشند و روی نکات مهم و تعاریف که عمدتاً در داخل کادرهایی قرار دارند از طرف دبیران محترم تأکید لازم انجام خواهد پذیرفت. حلّ «تمرین»ها به عهدهٔ دانش‌آموزان است؛ اما ضرورت دارد که معلّم زمینه را برای طرح پاسخ‌ها و بررسی آنها در کلاس فراهم سازد.

پس از آماده شدن نسخهٔ اوّلیهٔ کتاب، مؤلفان جلسات فشرده‌ای را برای نقد و اصلاح آن برگزار و برخی تغییرات و اصلاحات لازم را نیز در کتاب اعمال کردند. نظرات حاصل از اعتباربخشی و آرای معلّمان سراسر کشور نیز در این اصلاحات مدّنظر قرار گرفت. در اینجا لازم است مراتب تقدیر و تشکّر خود را از همهٔ همکارانی که نسخهٔ اوّلیهٔ کتاب را مطالعه و نظرات و پیشنهادهای خود را به واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی ارسال کرده‌اند، ابراز نماییم. ده‌ها نقد رسیده از سراسر کشور نویدبخش حضور و مشارکت مؤثّر دبیران گرامی در تألیف کتاب‌های درسی است. علاوه بر آن، مشاورانی از مراکز آموزشی و پژوهشی نیز بخش‌هایی از کتاب را مطالعه و نقد کرده‌اند که جا دارد از آنها نیز قدردانی شود، همچنین از آقای مجید امیری برای استفاده از اشعار ایشان تشکر می‌کنیم. گروه تألیف، آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و عزیزان را از طریق رمزینه نظرسنجی کتاب‌های درسی دارد. اطمینان داریم که با اتکال به خدای متعال و تکیه بر تلاش، اراده و همّت شما دبیران محترم می‌توانیم به برآورده شدن اهداف کتاب امیدوار باشیم.

مؤلّفان

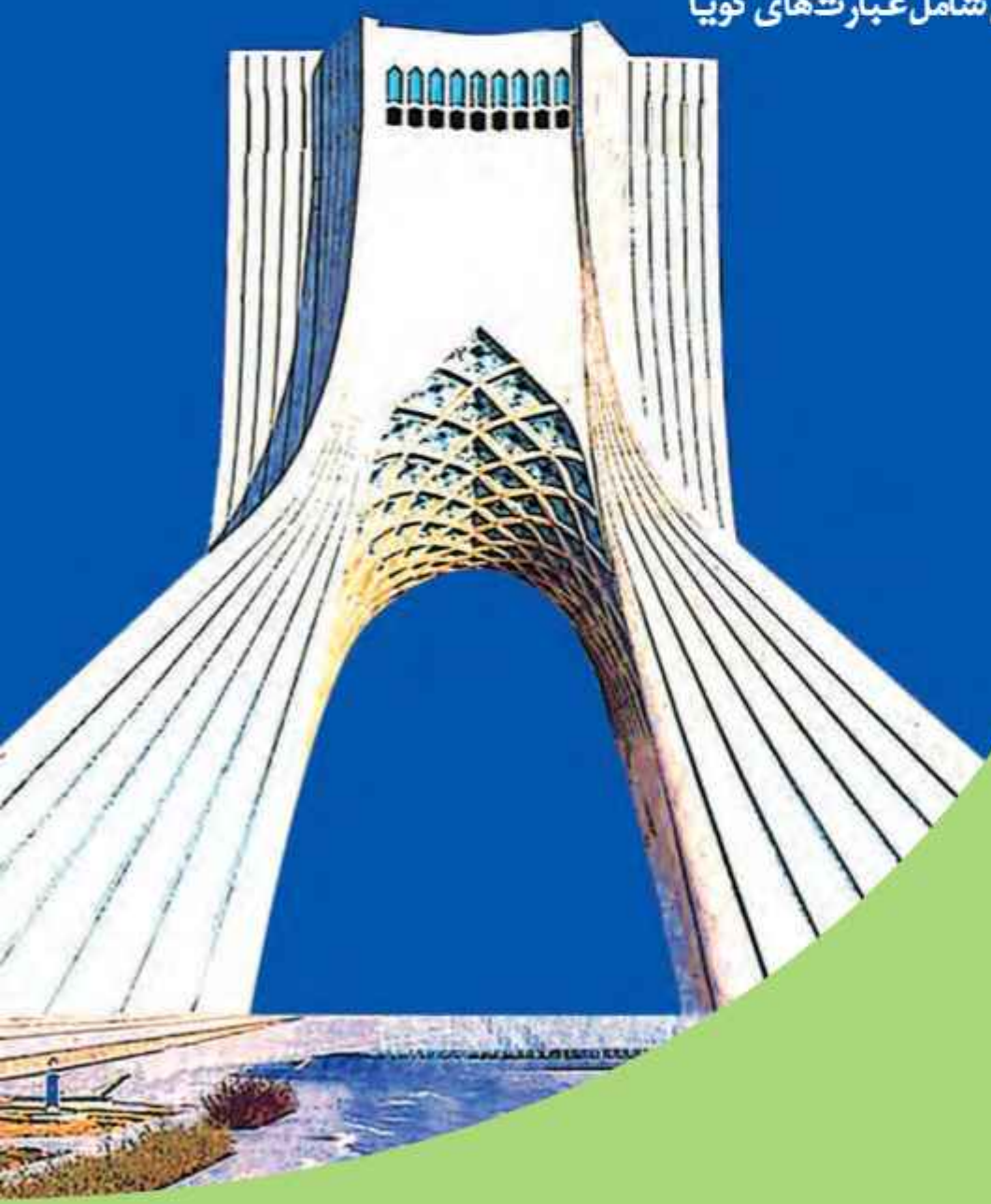
فصل اوّل

معادلهٔ درجهٔ دوم

درس ۱ معادله و مسائل توصیفی

درس ۲ حل معادلهٔ درجهٔ ۲ و کاربردها

درس ۳ معادله‌های شامل عبارت‌های گویا



درس ۱

معادله و مسائل توصیفی

معادلهٔ $۴x+۲=۱۰$ را در نظر می‌گیریم. این معادله به‌ازای $x=۲$ به یک تساوی عددی تبدیل می‌شود. $x=۲$ را جواب معادله یا ریشهٔ معادله می‌نامند.

فعالیت

با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشهٔ آن را بیابید.

فعالیت

عددی را بیابید که دو برابر آن به‌علاوهٔ عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

جواب : عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض :

دو برابر آن عدد به‌علاوهٔ عدد یک معادل $۲x+۱$ و پنج برابر همان عدد منهای عدد چهار، معادل $۵x-۴$ است که باید با یکدیگر برابر باشند، یعنی :

$۲x+۱=\ldots\ldots$

با بردن جملات شامل x به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$۵x-۲x=۱+۴ \Rightarrow ۳x=۵$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه، جواب معادله به‌دست می‌آید :

$$x=\frac{۵}{۳}$$

هرمعادله به‌صورت $ax+b=0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادلهٔ درجهٔ اول می‌نامند.
تنها جواب این معادله از $x=-\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید. (چرا؟)

کار در کلاس

یک حواصیل خاکستری دسته‌ای از حواصیل‌های سفید را در جنگل حرا * در جزیرهٔ قشم دید. به یکی از آنها گفت : اجازه می‌دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟

یکی از آنها پاسخ داد : اگر معمای زیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد :
«ما و ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می‌شویم».
لطفاً به پرنده کمک کنید تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد.
اگر «ما» را x فرض کنیم :

$$\text{ما} + \text{ما} + \text{نصف ما} + \text{نصف نصف ما} + ۱ = ۱۰۰$$

$$x + \cdots\cdots + \frac{۱}{۲}x + \cdots\cdots + ۱ = ۱۰۰$$

$$\cdots\cdots \Rightarrow x = \cdots\cdots$$

آیا معادلهٔ به‌دست‌آمده، درجهٔ اول است؟ چرا؟
ضرایب a و b کدام‌اند؟

* شرحی از موقعیت و شرایط این جنگل در صفحهٔ بعد آمده است.

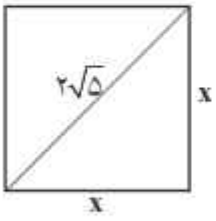
* جنگل حرا، جزیرهٔ قشم

حرا درختی است که بیشتر در آب‌های جنوبی ایران می‌روید. در این میان جنگل‌های همیشه‌سبز دریایی حـرا از این درختان زیبا تشـکیل شـده اسـت. این جنگل‌ها در حاشیهٔ شمال غربی قشم از زیباترین گردشگاه‌هایی است که همچون نگینی در پهنهٔ نیلگون خلیج‌فارس چشـم‌ها را می‌نوازد و دوسـتداران طبیعـت را بـه تماشـای خویش فرامی‌خواند. این جنگل‌های سـبز مأمن بیش از ۲۲۰ پرندهٔ بومی و مهاجر است. حواصیل سفید و خاکسـتری دو گونـهٔ زیبا از ایـن پرندگان‌اند.

یادی از گذشته

فعالیت کتاب نهم صفحهٔ ۷۳

– محیط مربعی را به‌دست آورید که قطر آن $۲\sqrt{۵}$ باشد.



به کمک رابطهٔ فیثاغورث داریم :

$\cdots\cdots + \cdots\cdots = (۲\sqrt{۵})^۲$

بنابراین :

$۲x^۲ = \cdots\cdots \Rightarrow x^۲ = \cdots\cdots\cdots \Rightarrow x = \cdots\cdots\cdots$

پس اندازهٔ هر ضلع مربع با درنظرگرفتن اینکه اندازهٔ ضلع مثبت است، برابر $x = \cdots\cdots$ است و محیط مربع فوق برابر است با:

$p = ۴x \Rightarrow p = \cdots\cdots\cdots$

معادلهٔ $۲x^۲ = ۲۰$ را یک معادلهٔ درجه دوم می‌نامیم.

فعالیت

۱. عددی را بیابید که مربع آن، ۳ برابرخود همان عدد باشد.

اگر عدد مورد نظر x فرض شـود، مربع همان عدد برابر x^2 و سـه برابر همان عدد برابر $3x$ است که باید دو عبارت با یکدیگر برابر باشند. یعنی :

$\ldots\ldots = 3x$

جواب‌های این معادله را می‌توانید حدس بزنید؟ آیا این معادله بیش از یک جواب دارد؟

از میان مقادیر زیر کدام‌یک می‌تواند جواب معادله باشد؟ چرا؟

$x=3$ ، $x=4$ ، $x=-3$ ، $x=1$ ، $x=0$

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

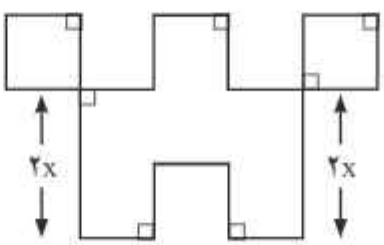
به جز روش حدس، برای حل معادلهٔ فوق از روش تجزیه نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$x^2=3x \Rightarrow x^2-3x=0$ ، $x(x-3)=0 \Rightarrow x=\ldots\ldots$ یا $x=\ldots\ldots$

یادآوری :
اگر $a\times b=0$ باشد
نتیجه می‌گیریم :
$a=0$ یا $b=0$

معادلـهٔ درجـهٔ دوم، معادلـه‌ای بـه شـکل $ax^2+bx+c=0$ اسـت که در آن $a\neq 0$ ضریب x^2، b ضریب x و c عدد ثابت است.

۲. در شـکل زیر طول تمام پاره‌خط‌ها به جز دو پاره‌خط مشـخص شده در شـکل برابر x است. اگر اندازهٔ مساحت شکل برابر با اندازهٔ محیط آن باشد، مقدار x را به‌دست آورید.



اندازهٔ محیط شکل = اندازهٔ مساحت شکل $\Rightarrow \ldots\ldots = \ldots\ldots$

کار در کلاس

نیما از پسرعمویش کیان، سه سال بزرگ‌تر است. اگر حاصل‌ضرب سن این دو ۴۰ باشد، پسرعموی کوچک‌تر چند سال دارد؟

اگر سن نیما برابر x باشد، طبق فرض مسئله، سن کیان برابر ..... است. بنابراین:

$x \times (\ldots\ldots) = 40$

آیا می‌توانید جواب‌های معادلهٔ فوق را حدس بزنید؟ این معادله از درجهٔ چند است؟

این معادله چند جواب دارد؟ آیا عدد منفی هم در معادله صدق می‌کند؟ این جواب در این سؤال معنی دارد؟

تمرین

۱. هرکدام از عبارت‌های زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوهٔ دو مساوی با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوهٔ عدد یک است.

۲. در یک کارخانه، حقوق یک مهندس دو برابر یک فن‌ورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ فن‌ورز دارد. مدیرعامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۲۹۶ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فن‌ورز در این کارخانه ماهیانه چقدر است؟

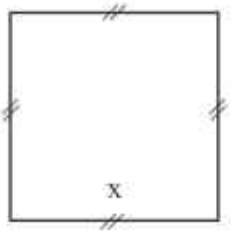
۳. با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانهٔ ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

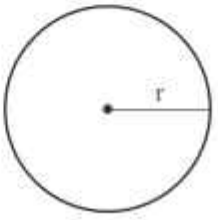
کارخانه ذوب آهن اصفهان

ذوب آهـن اصفهان به عنوان یک صنعت مهم و مادر، در سـال ۱۳۴۶ در دشـت طبس، واقـع در ۴۵ کیلومتری جنوب غربی شـهر اصفهان، تأسـیس و در سـال ۱۳۵۰ با ظرفیت محصولات فولادی ۵۵۰ هزار تن در سـال، به بهره‌برداری رسـید. این کارخانه هم‌اکنون با تلاش شبانه‌روزی مسـئولان و کارمندان آن به ظرفیت تولید بیش از ۲ میلیون تن محصولات فولادی و محصولات متنوع دیگر رسیده است. این کارخانه کمکی شایان به ساختن زیربنای کشور عزیزمان، ایران اسلامی دارد.

۴ . اگر مجموع مساحت‌های دو شکل زیر برابر ۶ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



شکل (۱)



$r = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} x$

شکل (۲)

الف	۱
ب	۲
پ	۳
ت	۴
ث	۵
ج	۶
چ	۷
ح	۸
خ	۹
د	۱۰
ذ	۱۱
ر	۱۲
ز	۱۳
ژ	۱۴
س	۱۵
ش	۱۶
ص	۱۷
ض	۱۸
ط	۱۹
ظ	۲۰
ع	۲۱
غ	۲۲
ف	۲۳
ق	۲۴
ک	۲۵
گ	۲۶
ل	۲۷
م	۲۸
ن	۲۹
و	۳۰
ه	۳۱
ی	۳۲

بازی با حروف الفبا به کمک مدل‌سازی ریاضی (رمزنگاری)

۵. حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره‌گذاری کرده‌ایم. هر حرف بدون نقطه با شمارهٔ آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می‌شود. حروف نقطه‌دار به‌صورت ax^n مشخص شده‌اند که در آن a شمارهٔ حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به‌عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می‌شود؛ زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت $۴x^۲$ مشخص می‌شود؛ زیرا چهارمین حرف الفباست ($a=۴$) و دارای دو نقطه است ($n=۲$).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم.

مثلاً برای معادل ریاضی کلمهٔ «غنچه» :

غنچه : غ + ن + چ + ه

↓ ↓ ↓ ↓

$۲۲x + ۲۹x + ۷x^۲ + ۳۱$

غنچه $\xrightarrow{\text{معادل ریاضی}}$ $۲۲x + ۲۹x + ۷x^۲ + ۳۱$

حال با توجه به توضیح فوق :

الف) جدول زیر را کامل کنید :

الگوی ریاضی معادل آن	کلمه به زبان فارسی
	آب
$۳x^۲ + ۱$	
	ذرت

ب) الگوی ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.

پ) آیا می‌توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟

ت) با الگوی فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید.

۶. اگـر در یـک قالی با ابعـاد m ۲/۱۰ × m ۲/۸۰ (که عموماً ۳×۲ نامیده می‌شـود) تعـداد گره‌های قالی ۵/۸۸۰/۰۰۰ عدد باشد :

الف) این قالی چند رج[۱] است؟

ب) اگـر برای هر گره ۱cm نخ قالی یا همان خامهٔ قالی اسـتفاده شـود، در ایـن قالی چند متر نخ قالی استفاده شده است؟

پ) یک قالی‌باف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند ۶۰۰۰ گره قالی ببافد. اگر این قالی‌باف ۵ روز در هفته کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟

ت) اگر این قالی‌باف برای خرید مواد اولیهٔ قالی شـامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و شش‌صد هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن‌را به قیمت ۳۵ میلیون تومان بفروشد، این قالی‌باف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

۱. «رج قالی» عبارت اسـت از تعداد گره‌های قالی در 7cm طول یا عرض قالی. به‌عنوان مثال منظور از یک قالی ۵۰ رج، وجود ۵۰ گره در یک ضلع مربع ۷×۷ است.

صنعت قالی بافی

بکی از قدیمی‌ترین و زیباترین هنرهای دستی مردم ایران، هنر قالی‌بافی است. در این حرفه به نخی که قالی با آن بافته می‌شود خامه قالی (خومه) می‌گویند. این نخ‌ها بر روی رشته‌های نخ افقی و قائمی بافته می‌شوند که به این رشته‌ها تاروپود قالی می‌گویند. عموماً ارزش یک قالی به اصالت نقشهٔ آن، قدمت قالی، بافندهٔ قالی و تعداد گره‌های قالی و جنس تاروپود قالی است.

درس ۲

حل معادلهٔ درجهٔ ۲ و کاربردها

برخلاف آنچه در «کار در کلاس‌های درس اول» دیدیم، در حالت کلی ممکن است نتوانیم جواب‌های معادله درجهٔ ۲ را حدس بزنیم.

در این درس با سه روش برای حل معادله درجهٔ ۲ آشنا می‌شویم.

روش اول: تجزیهٔ عبارت‌های جبری

در سال قبل با مفهوم اتحاد و نیز با چند اتحاد جبری آشنا شدید و استفاده از این اتحادها را در تجزیه عبارت‌های جبری آموختید. تعدادی از این اتحادها را برای حل معادله‌های درجه دو به‌کار خواهیم برد. برای یادآوری، این اتحادها را مرور می‌کنیم:

اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\end{cases}$$

اتحاد مزدوج:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

اتحاد جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

فعالیت

طرف دوم تساوی‌های زیر را به کمک اتحادهای خوانده شده کامل کنید:

الف) $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2=\cdots+\cdots+\frac{1}{4}$

ب) $(2+\cdots)^2=\cdots+12xy+\cdots$

پ) $(x-2y)(\cdots+\cdots)=x^2-4y^2$

ت) $x^2-\cdots+12=(x-6)(x-2)$

ث) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\cdots-\cdots+\frac{9}{4}$

فعالیت

مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادلهٔ درجه دوم در ستون بعدی است، با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادلهٔ فوق را در ستون آخر حل کنید.

ستون سوم	ستون دوم	ستون اول
$x^2+6x=0 \Rightarrow x(x+6)=0$ $\Rightarrow x=0$ یا $x=-6$ پس معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.	$x^2+6x=0$	اتحاد مربع تفاضل دو جمله
$x^2+6x+9=(x+3)^2=0 \Rightarrow$ $(x+3)(x+3)=0 \Rightarrow x=-3$ یا $x=-3$	$x^2+6x+9=0$	عامل‌یابی (فاکتورگیری)
روش۱: $x^2-16=0 \Rightarrow (x-4)(\ldots\ldots)=0$ $\Rightarrow x=\ldots\ldots$ یا $\ldots\ldots$ روش۲: $x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow \ldots$	$x^2-16=0$	اتحاد جمله مشترک
$(x+3)(\ldots\ldots)=0$	$x^2+5x+6=0$	اتحاد مربع مجموع دو جمله
	$x^2-10x+25=0$	اتحاد مزدوج و روش ریشه‌گیری

در یک معادلهٔ درجهٔ ۲، اگر دو ریشه، با هم برابر باشند، اصطلاحاً می‌گوییم، معادله ریشهٔ مضاعف دارد.

۱. با توجه به معادله‌های فوق در حالت کلی در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$:

الف) اگر $c=0$ از کدام روش بالا استفاده می‌کنید؟

ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنید؟

پ) برای حل معادلهٔ درجهٔ دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری، b در چه شرطی صدق می‌کند؟ آیا علامت‌های a و c مهم است؟

ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله، ریشهٔ مضاعف محسوب می‌شود؟

۲. آیا می‌توانید معادلهٔ درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونهٔ آن را مشخص کنید.

کار در کلاس

با استفاده از اتحادهای صفحه قبل معادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $x^۲+۳x-۴=۰$

از اتحاد یک جملهٔ مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$\Rightarrow (x\cdots\cdots)(x\cdots\cdots)=۰$

$\Rightarrow (x-\cdots\cdots)=۰$ یا $(x\cdots\cdots)=۰ \Rightarrow x=\cdots\cdots$ یا $x=\cdots\cdots$

۲) $۴x^۲-(۲-x)^۲=۰$

با استفاده از اتحاد ... عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می کنیم:

$(۲x-(۲-x))(۲x+(۲-x))=۰ \Rightarrow \cdots\cdots$

تمرین

۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۲x^۲-۸=۰$

ب) $(x+۲)(x-۳)=x-۳$

پ) $x^۲-۲x^۲=۰$

ت) $x^۲=x-\frac{۱}{۴}$

ث) $۲x^۲-۸x=۰$

ج) $x^۲-۵x+۶=۰$

چ) $\frac{x^۲}{۳}=x$

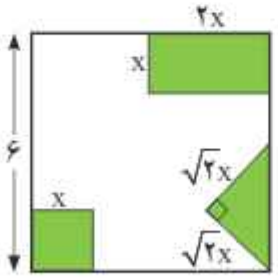
ح) $x^۲=۵-x^۲$

خ) $x^۲+۴x+۴=۰$

د) $۹x^۲+۳x-۲=۰$

ذ) $(x-۳)^۲=۴$

۲. از مربعی به ضلع ۶cm سه شکل روبه‌رو بریده شده است. مساحت باقی‌مانده $۲۴cm^۲$ است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟



۳. معادلهٔ درجه دومی بنویسید که $x=۲$ و $x=-۳$ جواب‌های آن باشد.

۴. معادلهٔ درجه دومی بنویسید که $x=1$ ریشهٔ مضاعف آن باشد.

۵. در معادلهٔ $(x-1)^2=K$:

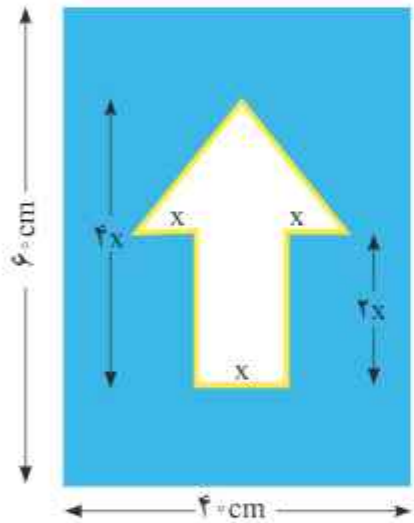
الف) جواب این معادله را درصورت وجود به ازای $K=2$، $K=4$، $K=0$ و $K=-9$ به‌دست آورید.

ب) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشهٔ مضاعف دارد؟

پ) به‌ازای چه مقادیری از k معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد؟

ت) به‌ازای چه مقادیری از k معادله ریشهٔ حقیقی ندارد؟

۶. برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک‌طرفه» روی یک پل، مطابق شکل زیر از برچسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینهٔ $1cm^2$ برچسب سفید ۳۰ تومان و هزینهٔ $1cm^2$ برچسب آبی ۱۰ تومان است. مجموع هزینهٔ برچسب‌های سفید و آبی ۲۷٫۰۰۰ تومان شده است.

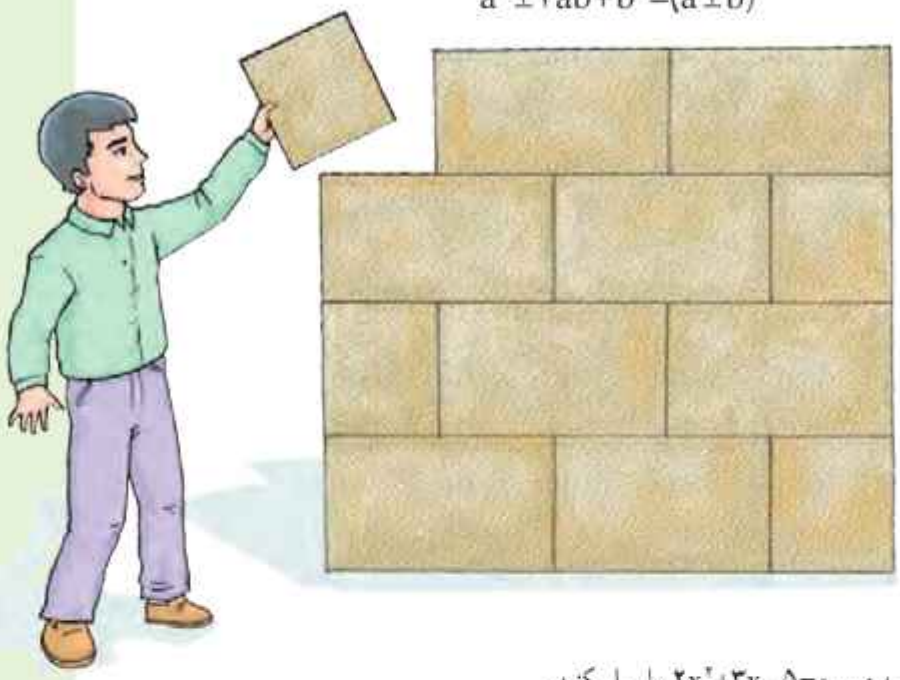


الف) اندازهٔ x چقدر است؟

ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل روبه‌رو علاوه بر چسب سفید و آبی از خطوط برچسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینهٔ 1cm آن ۱۰۰ تومان است، هزینهٔ رنگ‌آمیزی تابلو ۳۴٫۸۰۰ تومان می‌شود. در این حالت اندازهٔ x چقدر است؟

روش دوم : مربع کامل

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$



◆ **مثال:** معادلهٔ درجه دوم $2x^2+3x-5=0$ را حل کنید.

۱ ابتدا قرینهٔ عدد ثابت معادله؛ یعنی ۵ را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم:

$$2x^2+3x= \qquad (1)$$

۲ ۱ اگر ضریب x^2 مخالف ۱ باشد، دو طرف معادله را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم. بنابراین، در معادلهٔ بالا دو طرف تساوی را بر عدد ..... تقسیم می‌کنیم :

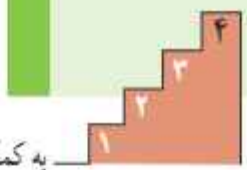
$$x^2+\frac{3}{2}x=\frac{5}{2} \qquad (2)$$

۳ ۲ ۱ در عبارت $\frac{3}{2}x$ با در نظر گرفتن اتحاد مربع دوجمله‌ای $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ برای ایجاد جملهٔ $2ab$، $\frac{3}{2}x$ را در عدد۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3}{2}x=2\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}x=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}x\right)=2\times\frac{3}{4}x$$

- سپس مربع عدد $\frac{3}{4}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می‌کنیم:

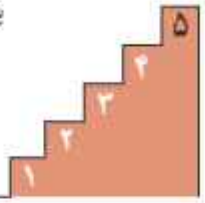
$$x^2+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{5}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad (3)$$



به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای سمت چپ تساوی (۳) را به $(a+b)^2$ تبدیل می‌کنیم :

$$x^2+\frac{3}{2}x+(\frac{3}{4})^2=\underset{a^2}{x^2}+2\times\underset{b\times a}{\frac{3}{4}x}+\underset{b^2}{(\frac{3}{4})^2}=\underset{(a+b)^2}{(x+\frac{3}{4})^2}$$

بنابراین :



$$(x+\frac{3}{4})^2=\frac{5}{2}+\frac{9}{16}\rightarrow(x+\frac{3}{4})^2=\frac{49}{16}\quad(۴)$$

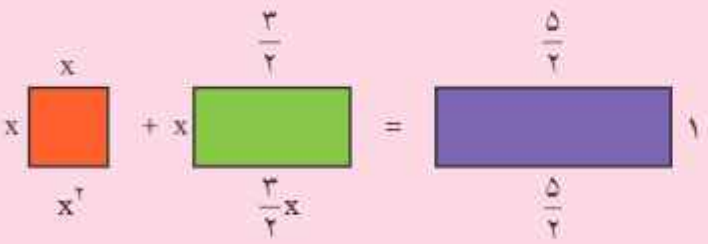
با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی، مقدار x به‌دست می‌آید :

$$x+\frac{3}{4}=\pm\frac{7}{4}\Rightarrow x=-\frac{3}{4}+\frac{7}{4}=\frac{4}{4}=1\quad\text{یا}\quad x=-\frac{3}{4}-\frac{7}{4}=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}$$

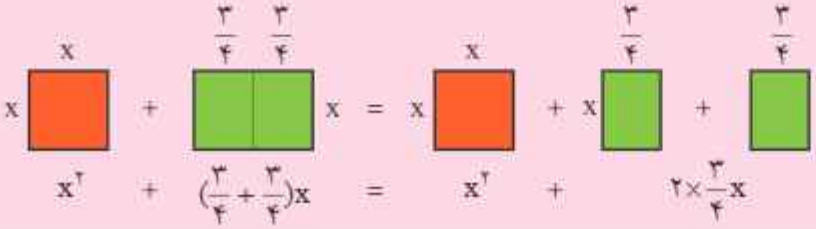
پس جواب‌های معادلهٔ $2x^2+3x-5=0$ یا همان ریشه‌های معادله، دو عدد حقیقی $x=1$ و $x=-\frac{5}{2}$ هستند.

مراحل حل معادلهٔ ذکر شده را از پلهٔ دوم به بعد به کمک تعبیر هندسی زیر نیز می‌توان بیان کرد :

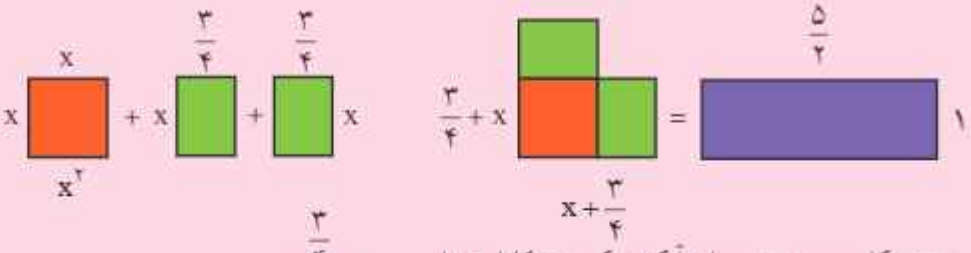
– اگر x^2 را مساحت مربعی به ضلع x و $\frac{3}{2}x$ را مساحت مستطیلی به طول $\frac{3}{2}$ و عرض x در نظر بگیریم:



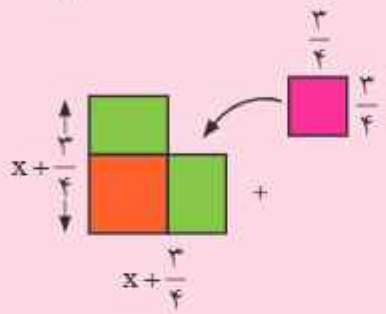
– با نصف کردن مستطیل به طول $\frac{3}{2}$ در تساوی(۱) و تبدیل آن به دو مستطیل به طول..... در تساوی(۲):



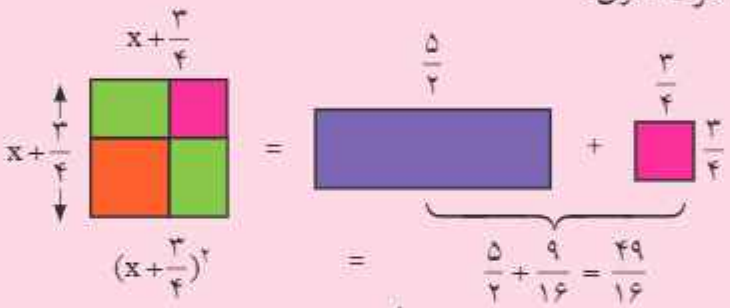
و قرار دادن ۲ مستطیل قبل در کنار مربع x^2 ، تساوی صفحه قبل به صورت زیر در می‌آید:



- شکل سمت چپ برای آنکه به یک مربع کامل تبدیل شود نیاز به مربعی به ضلع ..... دارد.



با اضافه‌کردن آن به ۲ طرف تساوی:



که مطابق حل صفحهٔ قبل معادله دارای ۲ جواب $x=1$ و $x=-\frac{5}{2}$ است. البته در روش هندسی فوق چون x طول ضلع است، جواب $x=-\frac{5}{2}$ معنی پیدا نمی‌کند.

شیوهٔ حل معادلهٔ درجهٔ دو به روش هندسی ذکر شده اولین بار توسط ریاضی‌دان، منجم، مورخ و جغرافی‌دان ایرانی و مسلمان «ابوعبدالله محمدبن موسی خوارزمی» در کتاب جبر و مقابله در بخش اول کتاب در اواخر قرن دوم هجری مطرح شد. سؤال قبل که صورت کلی آن $x^2+px=q$ و با فرض $p,q>0$ است، یکی از شش حالت خاصی است که خوارزمی برای حل معادلهٔ درجه دو در این کتاب مطرح و حل کرده است. هرچند همهٔ معادله‌های درجه دوم را نمی‌توان با این شش روش حل کرد؛ اما بیان مسائل هندسی در قالب جمله‌های جبری در این کتاب بنای اصلی توسعهٔ نظریه جبری معادله‌ها است. کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی قرن‌ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا قرن شانزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان بوده است. این کتاب که به زبان عربی نوشته شده است، در قرن ۱۲ میلادی دوباره توسط «جرارد کرمونی» و «رابرت چستری» به زبان لاتین ترجمه شده است. این ترجمه‌ها را می‌توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. همچنین در سال ۱۸۳۱ میلادی نیز «فردریک رزن» این کتاب را بار دیگر از زبان عربی به زبان انگلیسی ترجمه کرده است. گفتنی است که یک نسخهٔ خطی این کتاب در دانشگاه آکسفورد و نسخهٔ خطی دیگر آن در قاهره موجود است.

کار در کلاس

با محاسبهٔ مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادلهٔ درجهٔ دو، در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجهٔ به‌دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

تمرین قبل از مسابقه

۱) $۲x^۲-۶x-۱=۰$

$۲x^۲-۶x=۱$

$x^۲-۳x=\frac{۱}{۲}$

$x^۲-۲x=\frac{۱}{۲}$

$x^۲-۲\times\frac{۳}{۲}x=\frac{۱}{۲}$

$\downarrow$

$(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۹}{۴}$

$x^۲-۲(\frac{۳}{۲}x)+\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{۲}+\frac{۹}{۴}$

$(x-\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۱۱}{۴}$

$x-\frac{۳}{۲}=\pm\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$

$\begin{cases} x=\frac{۳}{۲}+\frac{\sqrt{۱۱}}{۲} \\ x=\frac{۳}{۲}-\frac{\sqrt{۱۱}}{۲} \end{cases}$

مسابقه

۲) $۳x^۲-۲=۶x$

$۳x^۲-۶x=\cdots$

$x^۲-\cdots=\cdots$

$\_\_\_\_=\_\_\_\_$

$\_\_\_\_=\_\_\_\_$

$(\ )^۲=\_\_\_\_$

$\_\_\_\_=\_\_\_\_$

$\begin{cases} x=\cdots\cdots \\ x=\cdots\cdots \end{cases}$

تمرین

معادله‌های درجهٔ دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2-5x+6=0$ ب) $9x^2+3x-2=0$

پ) $x^2+\frac{1}{4}=-x$ ت) $x^2+6x+9=0$

روش سوم : روش کلی حل معادلهٔ درجهٔ دوم

با استفاده از روش مربع کامل برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ روش کلی برای حل معادله به‌دست می‌آید. با مرور پله‌های گفته شده در بخش قبل :

۱ قرینهٔ عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم:

$$ax^2+bx=-c \quad (1)$$

۲ دو طرف معادله را به ضریب x^2 یعنی a تقسیم می‌کنیم:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \quad (2)$$

۳ ضریب $\frac{b}{a}$ را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم و مربع عبارت $\frac{b}{2a}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می‌کنیم:

$$x^2+2(\frac{b}{2a})x=-\frac{c}{a} \Rightarrow x^2+2(\frac{b}{2a})x+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a} \quad (3)$$

۴ عبارت سمت چپ تساوی (۳) را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

۵ با شرط $b^2-4ac>0$ و با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

عبارت b^2-4ac را مبین معادلهٔ درجه دوم می‌نامند و آن را با Δ[1] نشان می‌دهند.

براساس علامت Δ می‌توان در وجود و تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم اظهارنظر کرد:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ۲ جواب است که عبارت‌اند از:

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad و \quad x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک جواب است. (در این حالت این ریشه را ریشهٔ مضاعف می‌نامند.)

$$x=-\frac{b}{2a}$$

پ) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله جواب ندارد. (چرا؟)

فعالیت

۱. جواب‌های معادلهٔ $x^2-3x+2=0$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

■ **حل:** با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب: $a=1$ و $b=-3$ و $c=2$ است.

بنابراین:

$$\Delta=b^2-\dots \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4\times 1\times 2=9-8=1$$

$\Delta > 0$ پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2} \Rightarrow x=2 \text{ یا } x=1$$

۲. جواب‌های معادلهٔ $4x^2+7x-2=0$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

■ **حل:** با در نظر گرفتن $a=\dots \quad b=\dots \quad c=\dots$:

$$\Delta=\dots\dots \Rightarrow \Delta=49-4\times 4\times(-2)=81$$

$\Delta > 0$ و معادله دارای دو جواب است:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{2\times 4}=\frac{\quad}{8} \Rightarrow$$

---

۱. Δ چهارمین حرف الفبای یونانی است که آن را «دلتا» می‌خوانند. در الفبای یونانی، دلتای بزرگ را با علامت Δ و دلتای کوچک را با علامت δ نشان می‌دهند.

۳. جواب‌های معادلهٔ $3x^2+x+7=0$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

■ **حل :** با در نظر گرفتن $a=3 \quad b=1 \quad c=7$:

$\Delta = b^2-4ac \Rightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots$

$\Delta < 0$ بنابراین معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

کار در کلاس

معادله‌های زیر را حل کنید و با به‌دست آوردن ریشه‌های معادله، x_1 و x_2 حاصل x_1+x_2 را به‌دست آورید. آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب a,b و c در معادلهٔ درجه دو گفته شده وجود دارد؟

الف) $3x^2+5x-2=0$ **ب)** $4x^2+3x-7=0$

طرح و حل دو مسئله کاربردی از معادلهٔ درجه دوم

مسئلهٔ اول :

مقدمه : در هر مسئلهٔ اقتصادی اگر x مقدار یا تعداد محصول باشد، سه رابطه مهم زیر تعریف می‌شوند:

رابطه هزینه (cost) یا C(x) : هزینه تولید x واحد کالا

رابطه سود (profit) یا P(x) : سود حاصل از فروش x واحد کالا

رابطه درآمد (Revenue) یا R(x) : درآمد حاصل از فروش x واحد کالا

ارتباط میان ۳ رابطه فوق به صورت زیر است:

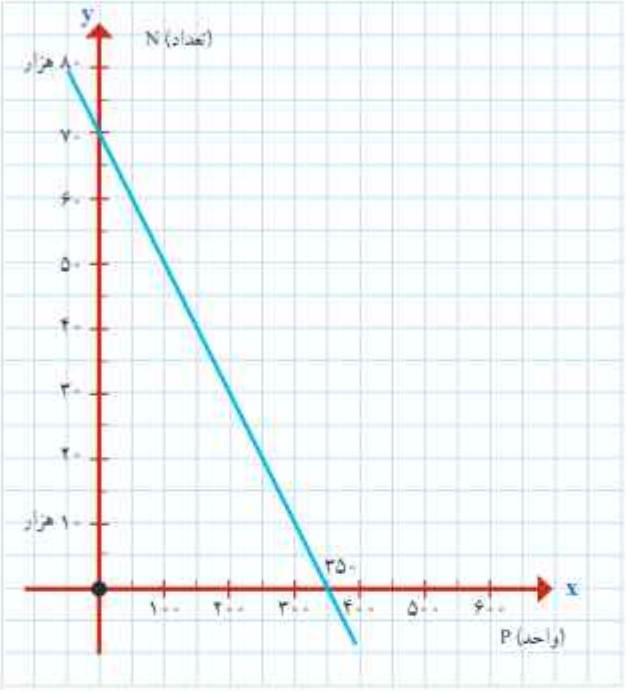
سود = درآمد (فروش) – هزینه $\Rightarrow P(x) = R(x) - C(x)$

فرض کنید یک دوچرخه جدید ورزشی طراحی کرده‌اید که می‌خواهید آن را به تولید انبوه برسانید. هزینه‌های شما شامل ۲ بخش است :

الف) ۷۰۰,۰۰۰ (واحد) برای راه‌اندازی کارگاه و خرید تجهیزات و تبلیغات و ... (هزینه اولیه)

ب) ۱۱۰ (واحد) برای ساخت هر دوچرخه (هزینه تولید)

با توجه به اطلاعات آماری تولید دوچرخه‌های مشابه در بازار، انتظار شما از تعداد فروش این دوچرخه با توجه به قیمت فروش آن از نمودار زیر پیروی می‌کند :



اگر N تعداد فروش دوچرخه و P قیمت هر دوچرخه تعیین شده باشد با توجه به نمودار فوق، رابطه زیر میان N و P برقرار است :

$N = ۷۰,۰۰۰ - ۲۰۰P$

این تساوی به این معنی است که اگر :

ـ قیمت دوچرخه صفر واحد تعیین شود، تعداد فروش دوچرخه برابر ۷۰,۰۰۰ دوچرخه است.

ـ قیمت دوچرخه ۳۵۰ واحد تعیین شود، تعداد فروش دوچرخه صفر عدد است.

ـ اگر قیمت دوچرخه ۳۰۰ واحد تعیین شود، تعداد فروش دوچرخه برابر است با

$N = ۷۰,۰۰۰ - ۲۰۰P = ۷۰,۰۰۰ - ۲۰۰ \times ۳۰۰ = ۱۰,۰۰۰$ دوچرخه

با توجه به اطلاعات فوق، الف) رابطه سود این کارخانه برحسب قیمت تعیین شده یک دوچرخه را مشخص کنید.

حل :

درآمد کارخانه = تعداد فروش دوچرخه × قیمت هر دوچرخه $= (۷۰,۰۰۰ - ۲۰۰P)P = ۷۰,۰۰۰P - ۲۰۰P^۲$

هزینه کارخانه = هزینه اولیه + هزینه تولید

$= ۷۰۰,۰۰۰ + ۱۱۰(۷۰,۰۰۰ - ۲۰۰P) = ۷۰۰,۰۰۰ + ۷,۷۰۰,۰۰۰ - ۲۲۰۰۰P$

$=۸,۴۰۰,۰۰۰ - ۲۲,۰۰۰P$

هزینه کارخانه − درآمد کارخانه = سود کارخانه

$= ۷۰,۰۰۰P - ۲۰۰P^۲ - (۸,۴۰۰,۰۰۰ - ۲۲,۰۰۰P)$

$\Rightarrow$ سود کارخانه $= -۲۰۰(P^۲ - ۴۶۰P + ۴۲,۰۰۰)$

مسئلهٔ دوم :

دریک کارگاه تولید جتر، سود حاصل از فروش x جتر به طور تقریبی از رابطهٔ $p(x) = -x^۲ + ۲۰۰x - ۲۴۰۰$ به‌دست می‌آید.

الف) اگر این کارگاه جتری نفروشد، چقدر از دست می‌دهد؟

ب) نقطهٔ سر به سر (break-even) میزانی از تولید یک بنگاه اقتصادی را نشان می‌دهد که در آن میزان هزینه‌ها با میزان درآمدها برابر می‌شود و بنگاه در این سطح ازتولید نه سود می‌کند و نه ضرر.

در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش جتر، کارگاه به نقطهٔ سر به سر خود می‌رسد؟

تمرین

۱. معادله‌های درجهٔ دوم زیر را حل کنید.

۱) $x^۲ - x = ۰$

۲) $۲x^۲ + x - ۱ = ۰$

۳) $۴x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$

۴) $x^۲ + ۱۷x - ۱۸ = ۰$

۵) $۳x^۲ - x + ۴ = ۰$

۶) $x^۲ + \sqrt{۳}x - ۱ = ۰$

۲. معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x - ۵ = ۰$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبهٔ ریشه‌های $x_۱$ و $x_۲$ حاصل‌ضرب آنها را

به‌دست آورید.

۳. اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-ax+۲۸=۰$ برابر ۴- باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۴. مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی‌اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟

۵. کدام‌یک از معادله‌های زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

الف) $x^۲+ax-۱=۰$ **ب)** $x^۲-x+a=۰$

*۶. نشـان دهید در معادلـهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $a+c=b$ باشـد. یکی از ریشـه‌های معادله برابر $x=-۱$ و دیگری $x=-\frac{c}{a}$ است.

*۷. با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ درجه دوم برابر $\frac{c}{a}$ است.

*۸. نشان دهید در هر معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد $(a+b+c=۰)$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x=۱$ و دیگری $x=\frac{c}{a}$ است.

---

*حل تمرین‌های ستاره‌دار اجباری نیست.

درس ۳

معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

فعالیت

علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود. او از در منزل تا سر خیابان اصلی را ۴ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت ۲۵۰۰ متری را از مسیر ویژهٔ دوچرخه‌سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند.

می‌خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه برسد، محاسبه کنیم.

۱. دستور محاسبهٔ سرعت متوسط $v=\frac{x}{t}$ است که در آن x مسافت طی‌شده و t مدت زمان طی مسیر است. داده‌های مسئله را در این دستور جایگزین کنید.

۲. برابری $۱۵=\frac{۲/۵}{t}$ یک معادله شامل عبارت گویا $\frac{۲/۵}{t}$ است. از آنجا که $t\neq ۰$، پس معادله با معناست، برای حل این معادله، دو طرف را با ۱۵- جمع کنید.

۳. با مخرج مشترک گیری سمت چپ، معادله را به‌صورت یک کسر بنویسید.

۴. کسری که مخرج آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می‌شود که صورت آن صفر شود، بنابراین صورت کسر بالا را برابر با صفر قرار دهید.

۵. از اینجا به بعد یک معادلهٔ یک‌مجهولی درجه اول به‌دست می‌آید. آن را حل و مقدار t را محاسبه کنید.

۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت‌های معادله و مخرج مشترک گیری، معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ به‌دست می‌آید. به شرط اینکه $Q(x)\neq 0$، وقتی معادله جواب دارد که $P(x)=0$ است، سپس ریشه‌های این معادله را به‌دست می‌آوریم. از بین ریشه‌های به‌دست‌آمده، آنهایی را قبول می‌کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند. (چرا؟)

◆ **مثال :** معادلهٔ $\frac{10}{x-3}-\frac{5(x-1)}{x-3}=2$ را حل کنید.

■ **حل :** با اضافه‌کردن ۲- به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{10}{x-3}-\frac{5(x-1)}{x-3}-2=0$$

اکنون با مخرج مشترک‌گیری از سمت چپ، تساوی آن را به‌صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{10}{x-3}-\frac{5(x-1)}{x-3}-\frac{2(\quad)}{(\quad)}=0\Rightarrow\frac{\qquad\qquad}{x-3}=0$$

مشاهده می‌کنیم که به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ رسیدیم. بنابراین با شرط $x-3\neq 0$ و با حل معادلهٔ $P(x)=0$، ریشه‌های معادله را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

$$21-7x=0\Rightarrow x=3$$

چون $x=3$ مخرج کسرها را صفر می‌کند، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

◆ **مثال :** معادلهٔ $\frac{x-2}{x-5}+\frac{x-1}{x+4}=\frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-5}+\frac{x-1}{x+4}-\frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)}=0$$

$$\Rightarrow\frac{(x-2)(\ldots\ldots)}{(x-5)(\ldots\ldots)}+\frac{(x-1)(\ldots\ldots)}{(x+4)(\ldots\ldots)}-\frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)}=0$$

$$\Rightarrow\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{(x-5)(x+4)}=0\Rightarrow\ldots\ldots=0\Rightarrow\ldots\ldots$$

◆ **مثال**: به‌ازای چه مقدار a معادلهٔ $\frac{a}{x}=\frac{x+1}{x+a}$، دارای جواب $x=1$ است.

■ **حل**: $x=1$ را در معادله قرار می‌دهیم و سپس مقدار a را به‌دست می‌آوریم.

$$x=1\Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{2}{a+1}\Rightarrow \frac{a}{1}-\frac{2}{a+1}=0\Rightarrow \frac{a(a+1)}{(a+1)}-\frac{2}{a+1}=0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+a-2}{a+1}=0\Rightarrow a^2+a-2=0\Rightarrow (a+2)(a-1)=0\Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ \text{یا} \\ a=1 \end{cases}$$

چون $a=1$ یا $a=-2$ مخرج کسرهای معادلهٔ $\frac{a}{1}-\frac{2}{a+1}=0$ را صفر نمی‌کنند، پس هردو قابل قبول‌اند.

کار در کلاس

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $1+\frac{8}{x^2}=\frac{4}{x}$

ب) $\frac{x-2}{x-4}=\frac{x+1}{x+3}$

پ) $\frac{24}{10+m}+1=\frac{24}{10-m}$

ت) $\frac{y+2}{y+3}-\frac{y^2}{y^2-9}=1-\frac{y-1}{3-y}$

ث) به‌ازای چه مقدار a، معادله $\frac{x}{a-x}+\frac{a-x}{x}=\frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است؟

طرح و حل چند مسئله به کمک معادله‌هایی شامل عبارت‌های گویا

۱. گلدانی نقره‌ای داریم که نسبت وزن نقرهٔ خالص به وزن مس خالص آن، برابر با ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می‌دانیم $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب‌شدن چه وزنی داشته است.

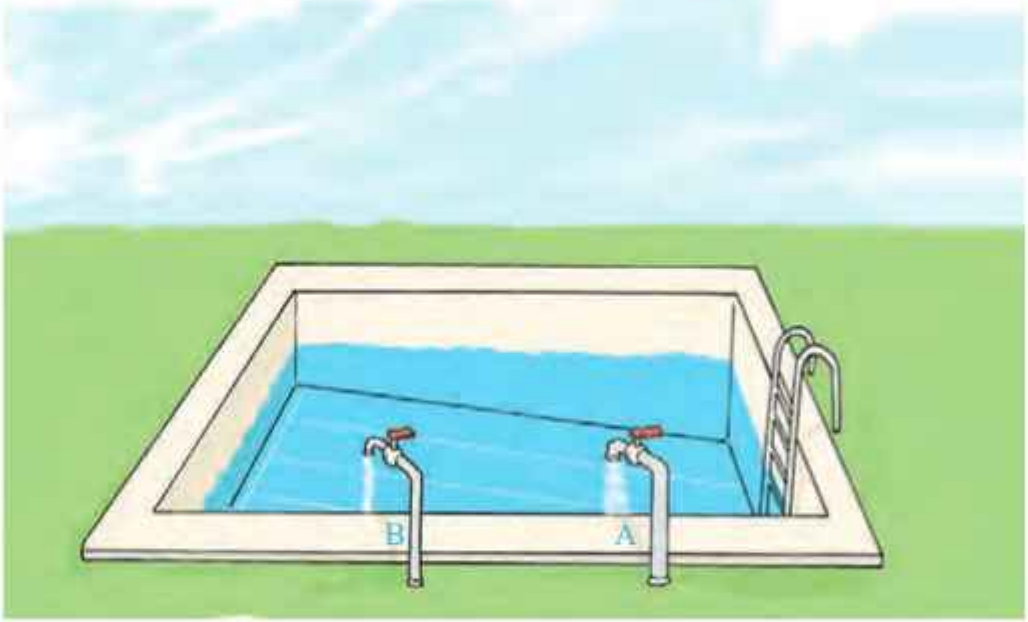
■ **حل**: $\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن مس}}=8$، اگر وزن مس را برابر با x در نظر بگیریم، آنگاه وزن نقره $8x$ و وزن گلدان قبل از ذوب‌شدن برابر با $8x+x=9x$ است.

اکنون اگر بعد از ذوب‌شدن ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کنیم، وزن گلدان جدید ۱۰۰ + ۹x است.
از آنجا که $\frac{۴}{۵}$ وزن گلدان جدید نقره است؛ یعنی $\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان جدید}} = \frac{۴}{۵}$، پس داریم:

$$\frac{۸x}{۹x+۱۰۰} = \frac{۴}{۵}$$

جواب معادلهٔ فوق x=۱۰۰ و از آنجا که وزن گلدان قبل از ذوب‌شدن ۹x است، درنتیجه وزن گلدان قبل از ذوب‌شدن برابر با ۹۰۰ گرم است.

۲. دو شیر آب A و B به یک استخر متصل‌اند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پُر می‌کند. چنانچه دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در ۱۲ ساعت پُر می‌شود. اگر شیر B به‌تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پُر می‌شود.



■ **حل:** فرض کنیم شیر B استخر را در x ساعت پُر کند. اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم، پس از یک ساعت $\frac{V}{x}$ استخر پر می‌شود و به همین ترتیب اگر شیر A باز باشد، پس از یک ساعت $\frac{V}{x-۱۰}$ استخر پُر می‌شود. حال اگر دو شیر را با هم باز کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{V}{x}+\frac{V}{x-۱۰}=\frac{V}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۱۰}=\frac{۱}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۱۰}-\frac{۱}{۱۲}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{}{} + \frac{}{} - \frac{x(x-10)}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow \frac{}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow \cdots$$

۳. یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هریک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هریک به اندازهٔ $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده‌اند؟[1]

■ **حل :** فرض کنید در ابتدا n نفر بوده‌اند؛ بنابراین به هریک $\frac{1}{n}$ کیک رسید، در مرحلهٔ بعد به هریک $\frac{1}{n+1}$ کیک رسید. از آنجا که در این مرحله به هریک $\frac{1}{6}$ کمتر رسیده است،خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{6}$$

با حل این معادله n=۲ به‌دست می‌آید.

تمرین

۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\frac{3x-5}{x+3} = 1$

ب) $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

پ) $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$

ت) $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$

ت) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$

ج) $\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$

۱. این مسئله اقتباس از کتاب جبر و مقابله خوارزمی است که در آن کتاب به‌جای (کیک)، کلمه درهم آمده است.

۲. مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{۵}{۱۲}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۳. هنگامی که دو چاپگر با هم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی‌تر به‌تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هرکدام از چاپگرها به‌تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند؟

۴. به ازای چه مقدار k، معادلهٔ $\frac{۴-t}{۲-۲t}=\frac{۳t^۲+k}{(t^۲+۱)^۲-۶۸}$ دارای جواب $t=-۳$ است.

فصل دوم

تابع

درس۱ مفهوم تابع

درس۲ ضابطهٔ جبری تابع

درس۳ نمودار تابع خطی

درس٤ نمودار تابع درجه۲

نمودار ساعتی که خورشید نسبت به مشهد در جهت قبله قرار می‌گیرد.

یکی از شیوه‌های جهت‌یابی قبله استفاده از سایهٔ شاخص، هنگام قرار گرفتن خورشید در راستای قبله است. در هر منطقه با تعیین ساعت دقیقی که خورشید در جهت قبله قرار می‌گیرد می‌توان با دقت بسیار بالایی جهت قبله در آن منطقه را تعیین کرد.

درس ۱

مفهوم تابع

او که مبنای جهان، «زوج» آفرید
خود به ما نزدیک‌تر شد از وزید
«تابعی» را از زمین تا آسمان
کرده در دل‌های انسان‌ها، نهان
تابع منظور ما، «پیوسته» است
«حدّ»، به آمیالِ دلِ ما بسته است
دل به بالا تا عنایت می‌کند
حدّ تابع، «بی‌نهایت» می‌کند
هر کسی تا بی‌نهایت را شناخت
چون «مُجانب» سوی آن بالا شناخت

سال گذشته در فصل خط و معادله‌های خطی با مثال دوچرخه‌سوار، رابطه‌ای را بین زمان و مسافت طی شده تعریف کردیم.

در مثال مذکور، دوچرخه‌سوار با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه ۲ متر را طی می‌کند. جدول زیر رابطهٔ بین زمان (t) و مسافت طی شده (d) را نشان می‌دهد: (جدول را کامل کنید)

زمان برحسب ثانیه (t)	۰	۱	۲	۲/۵	...	۴/۵	۵
مسافت طی شده بر حسب متر (d)	۰	۲	...	۵	۸	۹	...

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در این مثال متغیر زمان (t) به صورت مستقل تغییر کرده و متغیر مسافت (d) براساس تغییرات t تغییر می‌کند و در واقع تغییرات متغیر d تابعی از تغییرات متغیر t است. این رابطه که می‌توان آن را به‌صورت جبری و به شکل $d=2t$ نمایش داد، رابطه‌ای خطی نامیده شد. در حالت کلی رابطه‌هایی به‌صورت $y=ax+b$، را رابطه‌های خطی نامیدیم.

این رابطه‌ها که نمودار آنها یک خط است، در واقع ارتباط مشخصی بین x و y نقاطی است که روی این خط قرار دارند. به عنوان مثال اگر فرض کنیم $y=2x+1$ معادله یا ضابطهٔ یک خط باشد، مختصات هر نقطه که در این معادله صدق کند به این معناست که آن نقطه روی این خط واقع است و بالعکس اگر نقطه‌ای روی این خط واقع باشد، باید مختصات آن نقطه در معادلهٔ $y=2x+1$ صدق کند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید عرض هر نقطهٔ روی این خط یعنی y، مساوی است با دو برابر طول همان نقطه به علاوهٔ ۱ یعنی $(2x+1)$؛ بنابراین رابطهٔ بین x و y کاملاً معین است در جدول‌های زیر مختصات چند نقطه و رابطهٔ بین x و y آنها براساس ضابطهٔ داده شده، آمده است: (جاهای خالی را پر کنید)

$y=-2x+3$

x	۱	۵	۳	...	$\frac{1}{2}$	۰	...
y	۱	-7	...	۳	...	...	۰

x	۱	۲	...	۰	ـ۱
y	۲	...	$\frac{۵}{۴}$	...	...

$y=x^{۲}+۱$

در محیـط اطراف خودمان و در جهان طبیعت نیـز پدیده‌هایی می‌توان یافت که در آنها ارتباط خاصی بین دو متغیر وجود دارد.

به‌عنوان مثالی از این رابطه‌ها می‌توان به رابطهٔ بین قد و وزن افراد اشاره کرد. یکی از روش‌های متداول برای اندازه‌گیری وزن مطلوب در افراد، استفاده از نمایهٔ تودهٔ بدنی یا نماتوب (BMI) است که طبق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{نماتوب} = \frac{\text{وزن برحسب کیلوگرم}}{\text{مجذور طول قد برحسب متر}}$$

با اسـتفاده از این رابطه، برای هر فرد نماتوب محاسبه می‌شـود که بر اساس این شاخص و به‌صورت زیر نسبت به عدد حاصل نتیجه‌گیری می‌شود.

الف) شخص لاغر است و کمبود وزن دارد $\Rightarrow$ نماتوب <۱۹

ب) شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است $\Rightarrow ۱۹\leq$ نماتوب <۲۵

پ) شخص اضافه وزن دارد $\Rightarrow ۲۵\leq$ نماتوب <۳۰

ت) شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد $\Rightarrow$ نماتوب ≥ ۳۰

گروه سنی	نماتوب
۱۹_۲۴	۲۲
۲۵_۳۴	۲۳
۳۵_۴۴	۲۴
۴۵_۵۴	۲۵
۵۵_۶۴	۲۶
۶۵ به بالا	۲۷

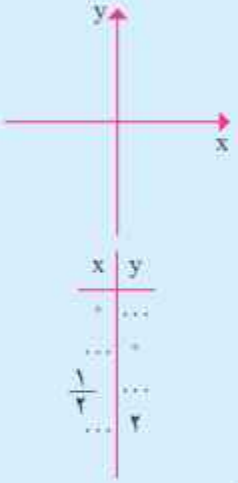
البته وزن مطلوب با سن هر شخص رابطهٔ مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا رفته و نماتوب افزایش می‌یابد. متخصصان علوم تغذیه با توجّه به سن افراد مطابق جدول روبه‌رو نماتوب مناسب افراد مختلف را تعیین می‌کنند.

پس از یافتن نماتوب متناسـب با گروه سنی، هر فرد می‌تواند وزن مطلوب خود را از فرمول زیر به‌دست آورد:

توان دوم یا مربع قد برحسب متر × نماتوب = وزن مطلوب برحسب کیلوگرم

بـا دقت در رابطه یا تسـاوی فوق تشـخیص می‌دهید که وزن مطلـوب، تابعی از طول قد هر فرد اسـت (بسـتگی به طـول قد دارد) و نیـز درمی‌یابید کـه وزن مطلوب به نماتـوب نیز بسـتگی دارد. در فرمول فوق

نمودار خـط $y=۴x-۲$ را روی محورهـای زیر رسـم کـرده و جدول داده شده را کامل کنید:



x	y
۰	...
...	۰
$\frac{۱}{۲}$	...
...	۲

طـول قد و نماتـوب متغیرهایی هسـتند که وزنِ مطلوب، متغیری اسـت که وابسـته به این دو متغیر اسـت.
آیا می‌توانید با توجّه به جدول قبل اگر فردی در گروه سـنی ۵۴ – ۴۵ قرار داشـته باشد و طول قد این فرد ۱۸۹ سانتی‌متر باشد، وزن مطلوب برای این شخص را تعیین کنید؟

فعالیت

می‌دانیم مساحت دایره از تساوی $S = \pi \times r^2$ به‌دست می‌آید. در این رابطه π عددی است ثابت که تقریباً $\pi = ۳/۱۴$ در نظر گرفته می‌شود و r شعاع دایره است :

۱. آیا متغیر S تابعی از شعاع دایره است؟
۲. آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟
۳. کدام متغیر، مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟
۴. جدول زیر را کامل کنید.

r بر حسب سانتی‌متر (شعاع)	۱	۱/۵	۲	۳	۴
S برحسب سانتی‌متر مربع (مساحت)	π	...	۴π	...	...
P برحسب سانتی‌متر (محیط)	...	...	...	۶π	...

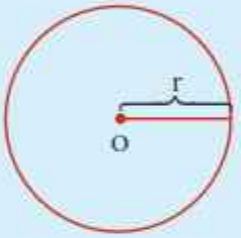
در رابطهٔ خطی $y = ۳x + ۱$ نیز y، تابعی از تغییرات متغیر مسـتقل x اسـت، یعنی وقتی x را به دلخواه و مسـتقل، تغییر می‌دهیم، y نیز تغییر می‌کند. حال اگر xها را روی محور افقی و yهای حاصل را روی محور عمـودی در نظـر بگیریم، به ازای هر x و y حاصل، یک نقطه در صفحه مشـخص می‌شـود که آن را با یک زوج به شـکل (x و y) نمایش می‌دهیم. ترتیب قرار گرفتن x و y در این زوج اهمیت دارد و به همین دلیل آن را یـک **زوج مرتب** می‌نامیم. در زوج مرتـب (x و y)، x را مؤلّفه یا مختص اول و y را مؤلّفهٔ دوم می‌نامیم.
(اگر $(a,b) = (c,d)$ آنگاه $a = c$ و $b = d$ و برعکس اگر $a = c$ و $b = d$ آنگاه $(a,b) = (c,d)$)

فعالیت

۱. جدول زیر را کامل کنید.

x	−۱	...	...	...	...	۲	$y = ۳x + ۱$
y	−۲	...	...	...	$۳\sqrt{۲}+۱$	...	
(x,y)	(−۱ ، −۲)	(... ، ۱)	$(\frac{۲}{۳}$ ، ۳)	(۱۰ ، ...)	(... ، ...)	(... ، ...)	

$\frac{۲\pi r}{۲r} = \pi$



ریاضی‌دان و منجم ایرانی، جمشید غیاث‌الدین کاشانی در اوایل قرن هشـتم هـ.ق توانسـت عدد π را با دقتی که تا ۱۵۰ سـال بعد از وی بی‌نظیر ماند، محاسبه کند. او کتـاب رسـالهٔ محیطیـه خود را با این جمله شـروع می‌کند:
«به‌نام او که از اندازهٔ نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است».

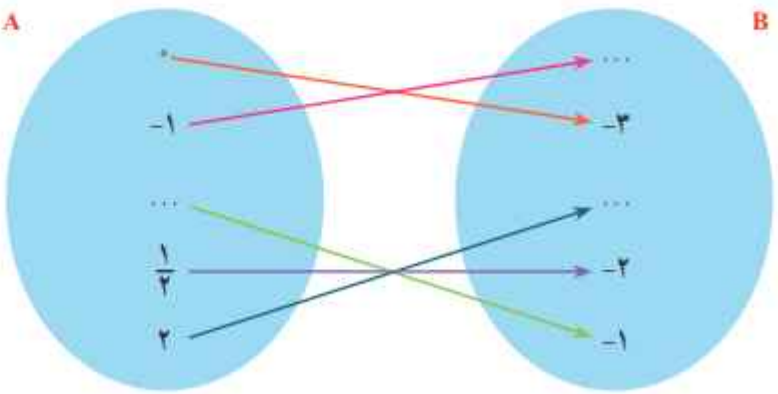
۲. مشابه قسمت ۱ جدولی برای $y = x^2$ تشکیل دهید.

استفاده از نمودار ون و رسم پیکان‌هایی از طرف متغیر مستقل به سمتِ متغیر وابسته به درک ارتباط بین این دو متغیر کمک می‌کند. به کار در کلاس زیر توجه کنید:

کار در کلاس

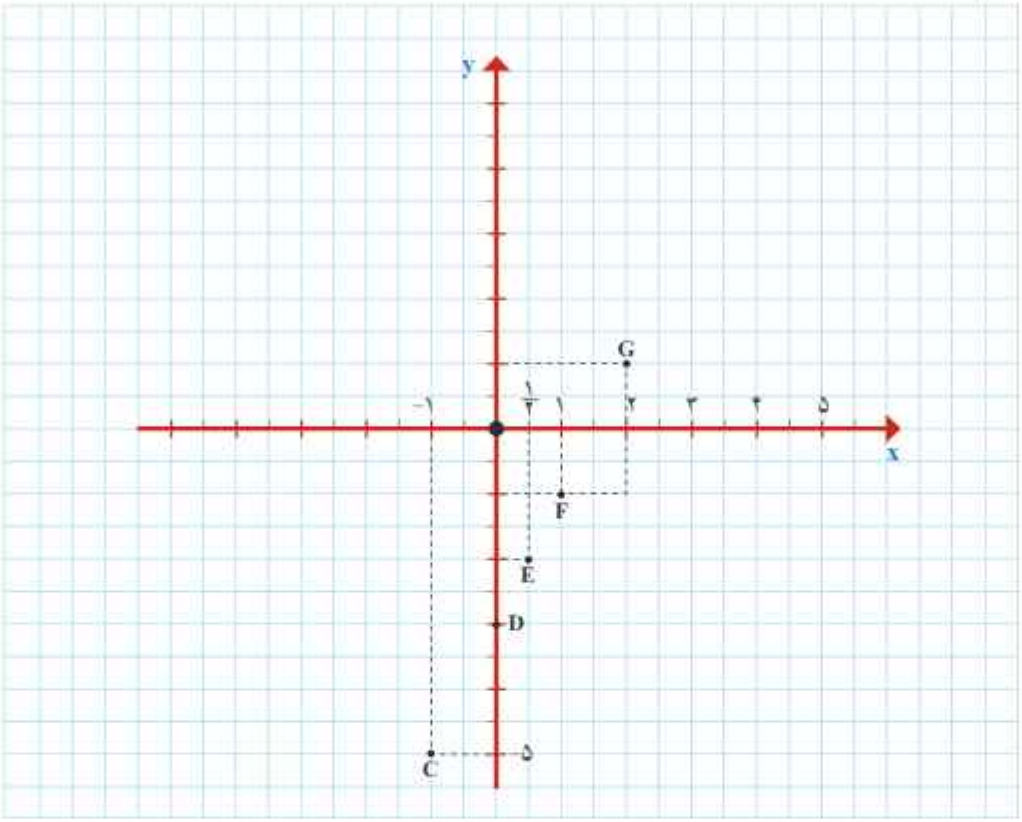
با توجه به رابطهٔ خطی $y = 2x - 3$، اگر فرض کنیم، xها با متغیرهای مستقل اعضای مجموعهٔ $A = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}, 2\right\}$ باشند. ابتدا جدول مربوط به این رابطه را مشابه جدول قبل، تشکیل می‌دهیم و سپس نمودار پیکانی آن را رسم می‌کنیم. (جاهای خالی را پر کنید.)

x	−۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	$y = 2x - 3$
y	−۵	...	...	...	...	
(x,y)	(−۱ ، −۵) C	(۰ ، ...) D	... E	... F	... G	



نمودار خط $y=2x-3$ را روی دستگاه مختصات رسم کنید:

اگر هر یک از «زوج مرتب»های جدول قبل را یک نقطه در صفحه فرض کنیم، **نمودار مختصاتی** رابطهٔ خطیِ قبل به‌صورت زیر رسم می‌شود:



◆ **سؤال**: برای رابطهٔ $y = x^2$ که $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ مشابه مثالِ قبل، جدول، نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

مفهوم تابع

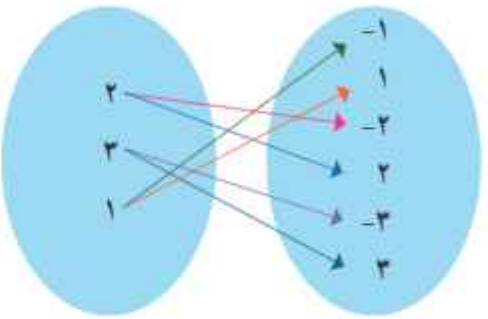
در تمام فعالیت‌ها، مثال‌ها و تمرین‌های قبل، رابطه‌ها طوری تعریف شده بودند که به ازای هر متغیر مستقل مانند x، دقیقاً یک مقدار برای y به‌دست می‌آید؛ مثلاً در رابطهٔ $y = 2x + 3$ اگر x را مساوی ۲ فرض کنیم، $y = 2 \times 2 + 3 = 7$ به‌دست می‌آید.

اگر این ویژگی برای یک رابطه وجود داشته باشد، آن را تابع می‌نامند. به‌عبارت دقیق‌تر:

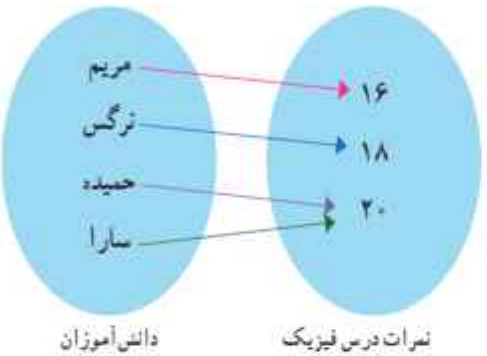
یک رابطه بین دو مجموعهٔ A و B (از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B) یک تابع نامیده می‌شود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعهٔ A دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B را بتوان نظیر یا مربوط کرد.

فعالیت

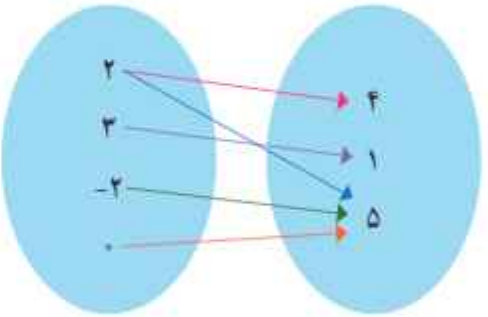
۱. کدام یک از رابطه‌ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع‌اند؟ چرا؟



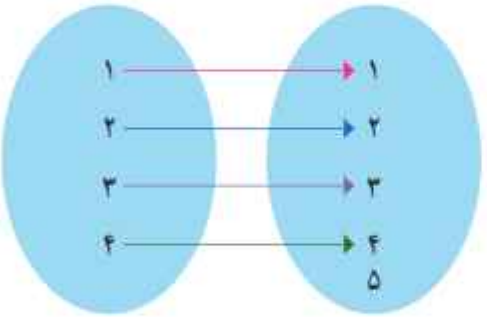
تابع ..... زیرا



تابع ..... زیرا



تابع ..... زیرا



تابع ..... زیرا

۲. کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها، نمایش یک تابع است؟

الف) $F = \{(۲,۳), (۳,۳), (۴,۳), (۵,۳)\}$

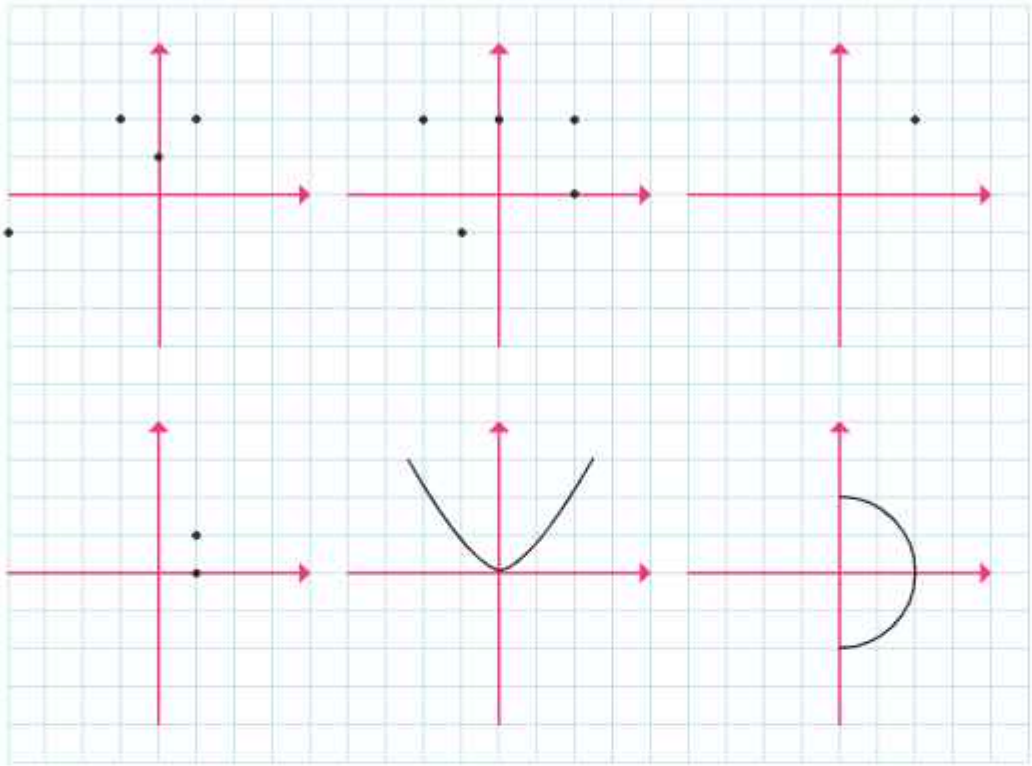
ب) $G = \{(۴,۱), (۲,-۱), (۱,-۱), (۴,۲)\}$

پ) $H = \{(۲,۳)\}$

ت) $I = \{(۳,۳)\}$

ث) $J = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۲,۴)\}$

۳. کدام یک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع‌اند؟ چرا؟



۴. کدام یک از رابطه‌های تعریف شدهٔ زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران، سوغاتیِ آن شهر را نسبت می‌دهد.

تابع است ☐ تابع نیست ☐

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می‌دهد.

تابع است ☐ تابع نیست ☐

پ) رابطه‌ای که به هر شهر، نمایندهٔ آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.

تابع است ☐ تابع نیست ☐

ت) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبلهٔ او را نسبت می‌دهد.

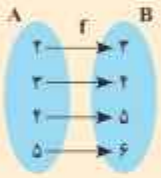
تابع است ☐ تابع نیست ☐

با توجّه به فعالیت قبل و تعریف تابع می‌توان گفت:

- اگر رابطهٔ بین x و y را (x متغیر مستقل) به‌صورت جدولی و زوج مرتبی نمایش دهیم، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.
- اگر رابطه از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B را با نمودار پیکانی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.
- اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم شود، در صورتی این رابطه تابع است که هیچ دو نقطه‌ای روی خطی که موازی محور yها باشد، قرار نگیرند.

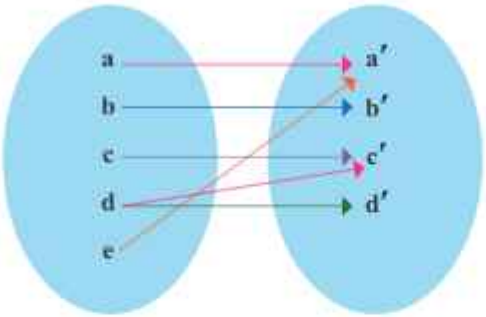
کار در کلاس

در جدول زیر در هر سطر یکی از نمایش‌های رابطه‌ای مشخص شده است. ابتدا برای هر رابطه جاهای خالی را پر کنید سپس تشخیص دهید که کدام رابطه، تابع است.

جدولی	توصیفی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی	نمایش پیکانی
				
	f رابطه‌ای است که به هر عضو مجموعهٔ $A=\{0,1,-1,2,-2\}$ توان چهارم آن را نسبت می‌دهد			
		f = {(شنا، علی)، (فوتبال، رضا)، (شنا، رضا)، (والیبال، آرش)، (کشتی، حمید)، (تیراندازی، علی)}		

تمرین

۱. نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟



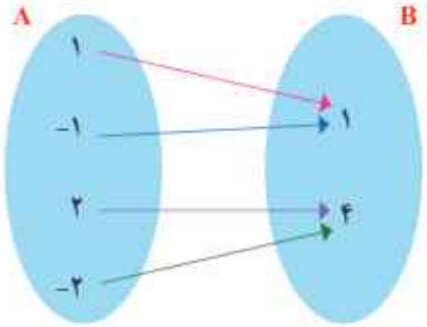
۲. اگر A مجموعه‌ای ۳ عضوی و B مجموعه‌ای ۲ عضوی فرض شود. سه تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B را تعریف کنید.

۳. در رابطهٔ زیر جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

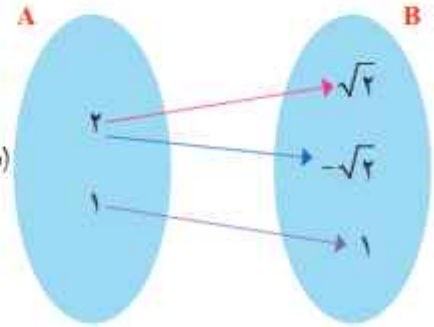
$$f = \{(۲, ۳), (\cdots, ۵), (۳, \cdots), (\cdots, \cdots)\}$$

۴. کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟

الف)



ب)



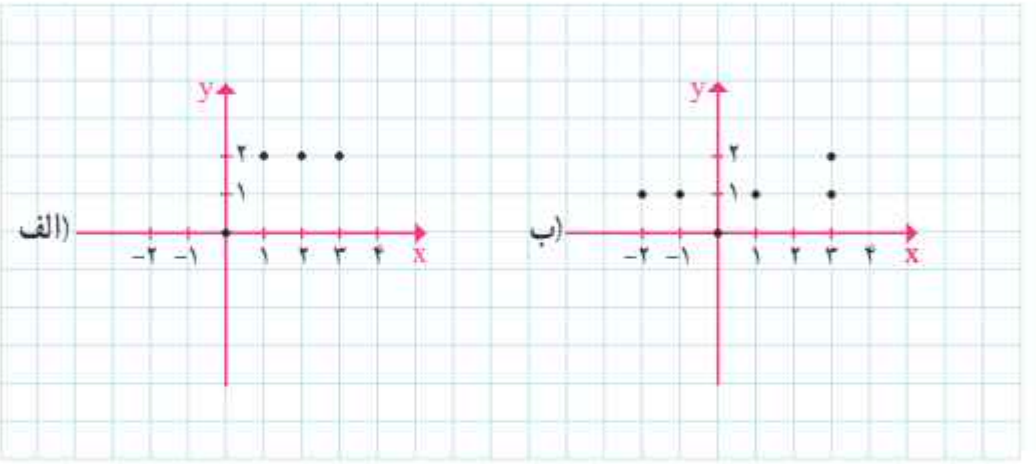
پ) $f = \{(۲, ۱), (۳, ۲), (۲, ۲), (۳, ۴), (۵, ۱)\}$

ت) رابطه‌ای که به هر شخص، شمارهٔ ملی او را نسبت می‌دهد.

۵. اگر رابطهٔ f تابع باشد، در این صورت حاصل x^2+y^2 را به‌دست آورید. (مجموعهٔ f را پس از محاسبهٔ x و y بنویسید.)

$$f=\{(2,x+y),(2,4),(5,2),(3,4),(5,x-y)\}$$

۶. نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می‌کند؟



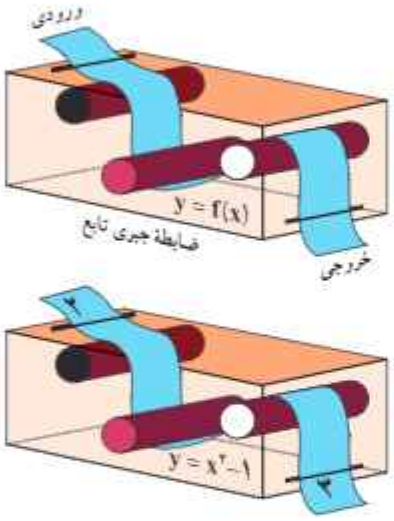
توابع در شاخه‌های مختلف علوم کاربرد فراوان دارند. برای مثال در علم اقتصاد از تابع سود، تابع هزینه و تابع درآمد در محاسبات و تصمیم‌گیری‌های اقتصادی استفاده می‌شود و یا در فیزیک، هنگامی که می‌خواهیم رابطهٔ بین چند متغیر را بیان کنیم، مخصوصاً هنگامی که مقدار یک متغیر کاملاً وابسته به متغیرهای دیگر است، از توابع استفاده می‌شود.

توابع در علوم مختلف بیشتر به عنوان عملگر در نظر گرفته می‌شوند و کاری را بر روی ورودی‌های خود انجام می‌دهند. توابع را همچنین مورد استفاده در علم رایانه برای مدل‌سازی ساختمان داده‌ها و تأثیرات الگوریتم می‌بینیم.

درس ۲

ضابطهٔ جبری تابع

گاهی اوقات می‌توانیم رابطهٔ بین مؤلفهٔ اول و دوم زوج مرتب‌های مربوط به یک تابع را با یک ضابطه (قانون) بیان کنیم. به‌طور مثال تابعِ $f = \left\{(۱, ۴), (۲, ۵), (-۱, ۲), \left(\frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۲}\right)\right\}$ را در نظر می‌گیریم در این تابع همواره با اضافه کردنِ ۳ واحد به مؤلفهٔ اول مؤلفهٔ دوم، به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر اگر $(x,y) \in f$، در این صورت $y = x+۳$. معادلهٔ $y = x + ۳$ را ضابطهٔ تابع f می‌نامیم. اگر تابع f را به‌عنوان یک ماشین درنظر بگیریم و x متغیر مستقل فرض شود، در این صورت تأثیر تابع f روی x را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم و حاصل این تأثیر همان y (متغیر وابسته) است؛ یعنی، $y = f(x)$



دامنه و بُرد تابع

در نمایش توسط زوج مرتب برای یک تابع، مجموعهٔ شامل همهٔ مؤلفه‌های اول را **دامنهٔ تابع** و مجموعهٔ شامل همهٔ مؤلفه‌های دوم را **بُرد تابع** می‌نامیم. دامنهٔ تابع f را با D_f[۱] و بُرد آن را با R_f[۲] نشان می‌دهیم.

یک تابع مانند f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، قانون یا ضابطه‌ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B را نسبت دهد.

۱. Domain
۲. Range

برای نمایش تابعی چون f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B می‌نویسیم : $\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$ که $y = f(x)$ را ضابطهٔ تابع و A را دامنهٔ تابع f درنظر می‌گیریم.

فعالیت

با توجّه به ضابطهٔ هر تابع و مانند نمونه، مجموعهٔ مقادیر یا بُرد هر تابع را مشخص کنید.

$$\begin{matrix} f: A \to B \\ f(x) = 2x^2 + 1 \end{matrix} \quad , A = \left\{-1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

x	$f(x) = 2x^2 + 1$
-1	$f(-1) = 2\times(-1)^2 + 1 = 3$
$\sqrt{2}$	$f(\sqrt{2}) = 2\times(\sqrt{2})^2 + 1 = 5$
2	$f(2) = 2\times(2)^2 + 1 = 9$
1	$f(1) = 2\times(1)^2 + 1 = 3$
0	$f(0) = 2\times(0)^2 + 1 = 1$
$\frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 2\times(\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{3}{2}$

$$\to R_f = \left\{3, 5, 9, 1, \frac{3}{2}\right\}$$

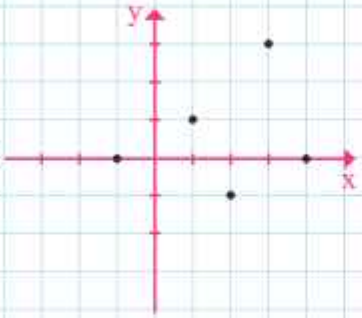
الف) $\begin{matrix} f: A \to B \\ f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \end{matrix} \quad , A = \{0, -1, 8, 3, 2\}$

ب) $\begin{matrix} f: A \to B \\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} \end{matrix} \quad , A = \left\{-2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}$

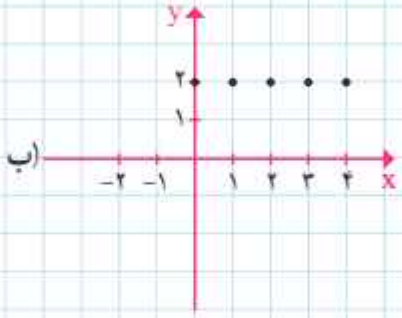
کار در کلاس

۱. برای هریک از توابع زیر، دامنه و بُرد را مشخص کنید و در صورت امکان ضابطهٔ هر تابع را بنویسید.

الف)

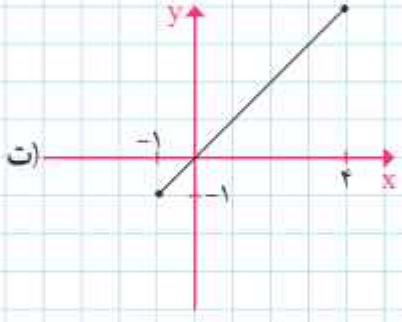


ب)



پ)

ت)



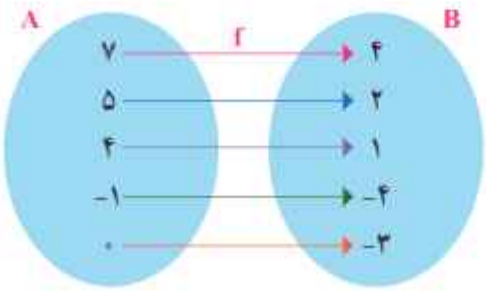
۲. دامنه و برد هریک از تابع‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $f: A \to B$ $\quad R_f = \{۲,۳,۴,۵,\ldots\}$

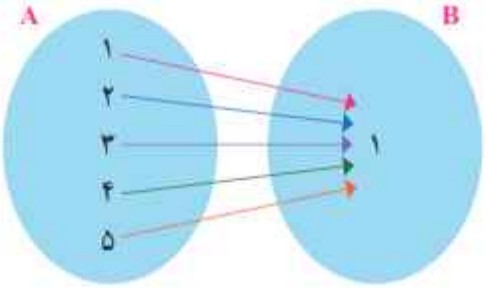
$f(x) = x + ۴ \quad A = \{۲, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots\}$

ب) $f = \{(۱,-۱), (۲,-۲), (۳,-۳), (۴,-۴), (\sqrt{۲}, -\sqrt{۲})\}$

پ)



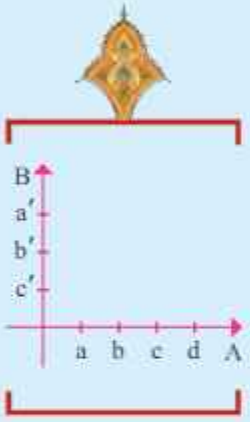
ت)



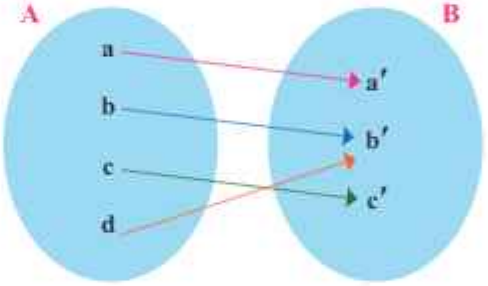
ث) $f=\left\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}),(\sqrt{۲},\sqrt{۲}),(۰,۰)\right\}$

تمرین

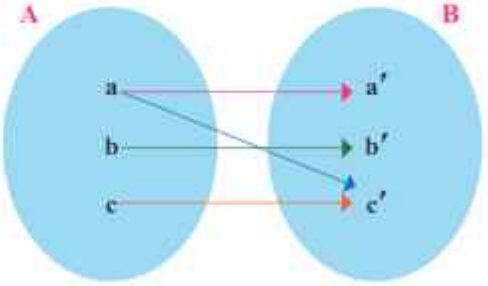
۱. کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.



الف)



ب)



پ) $f=\{(۲,-۱),(۳,-۱),(۱,-۱),(۴,۱),(۲,۴)\}$

ت) $g=\{(۱,۱)\}$

ث) $f:\ IR \to IR$

$f(x)=۲x+۱$

ج) $f: IR \to IR$
$f(x) = x$

ج) $f: IR \to IR$
$f(x) = ۲$

۲. بُرد هریک از توابع زیر را با توجّه به ضابطه و دامنهٔ داده شده، به‌دست آورید.

الف) $\begin{matrix} f: A \to B \\ f(x) = x^۲ + x + ۱ \end{matrix}$ ، $A = \{۰, -۱, ۱, ۲, -۲\}$

ب) $\begin{matrix} f: A \to B \\ f(x) = \dfrac{x+۱}{x} \end{matrix}$ ، $A = \left\{\dfrac{۱}{۲}, ۱, -۱, ۲, -۲\right\}$

ب) $\begin{matrix} f: A \to B \\ f(x) = \sqrt{x+۱} \end{matrix}$ ، $A = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۸\}$

ت) $\begin{matrix} f: A \to B \\ f(x) = x \end{matrix}$ ، $A = W = \{۰, ۱, ۲, \cdots\}$

ث) $\begin{matrix} f: A \to B \\ f(x) = ۰ \end{matrix}$ ، $A = \mathbb{R}$

۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می‌دهد. f کدام تابع است؟ حاصل f(۳) را بیابید.

الف) $f: IR \to IR$
$f(x) = ۲(x - ۴)^۳$

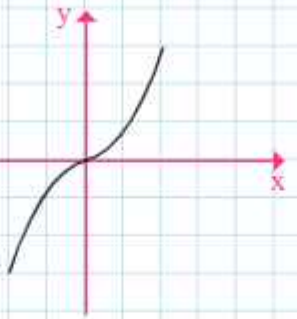
ب) $f: IR \to IR$
$f(x) = ۲\sqrt[۳]{x - ۴}$

ب) $f: IR \to IR$
$f(x) = ۲x^۳ - ۴$

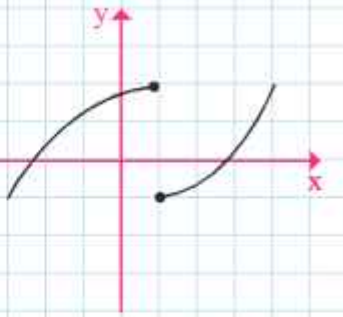
ت) $f: IR \to IR$
$f(x) = ۲\sqrt[۳]{x} - ۴$

۴. کدام نمودار، نمایش یک تابع می‌باشد؟ چرا؟

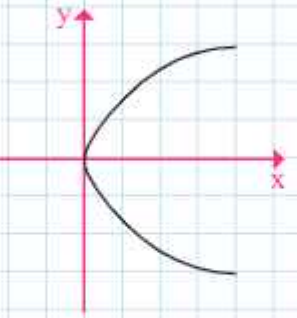
الف)



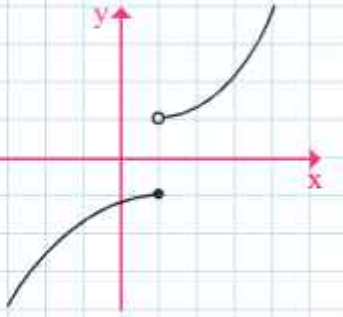
ب)



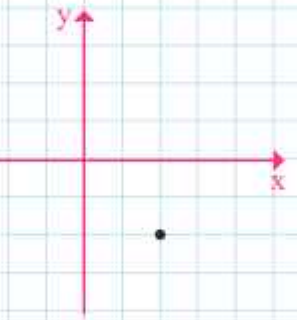
پ)



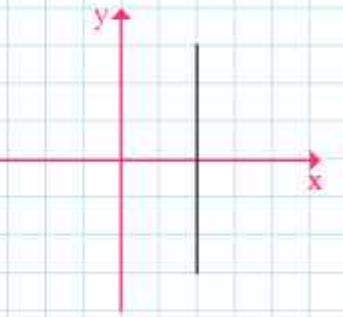
ت)



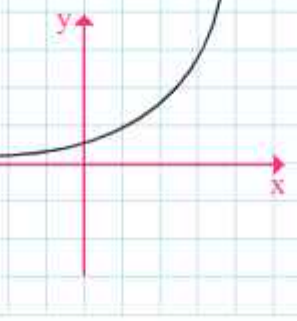
ث)



ج)



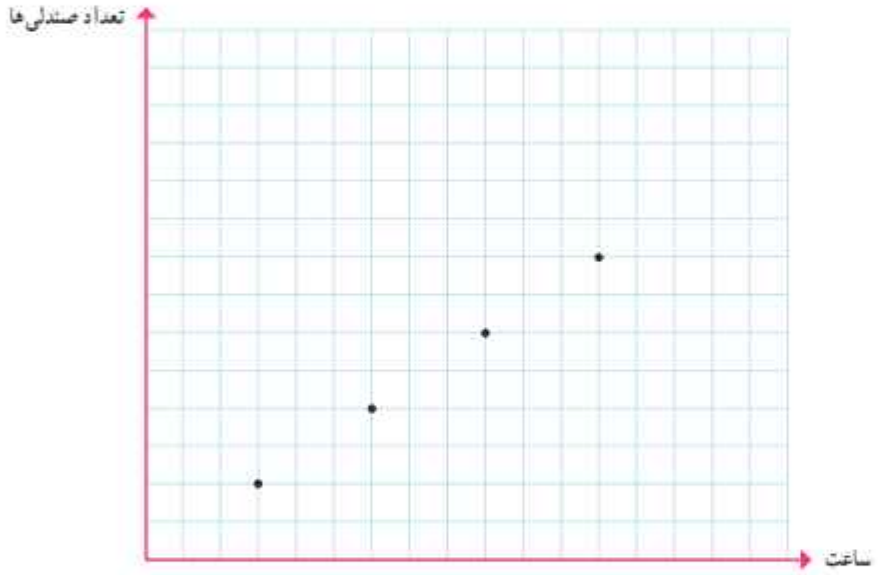
چ)



درس ۳

نمودار تابع خطی

سؤال: نمودار زیر تعداد صندلی‌هایی را که در پایان هر سه ساعت کار در یک کارگاه تولید می‌شوند، نشان می‌دهد. آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه را در پایان پانزدهمین ساعت کاری پیش‌بینی کنید؟



– آیا تعداد صندلی‌های تولید شده در پایان هشتمین ساعت کاری بیشتر از پنج عدد است؟

– آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولیدشده در این کارگاه در پایان هر ساعت خاص را پیش‌بینی کنید؟

فعالیت

الف) طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده است ۵ سانتی‌متر است و به‌ازای هر کیلوگرم وزنه‌ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی‌متر به طول آن افزوده می‌شود.

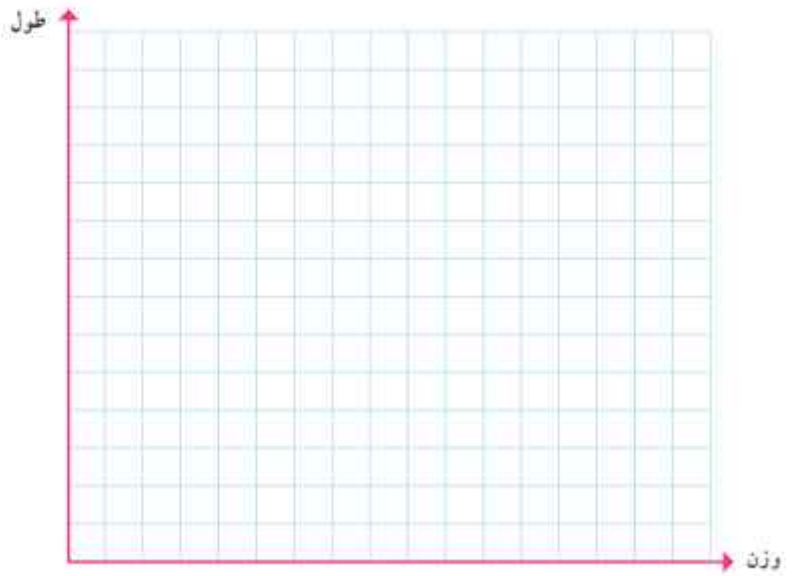
طول فنر را در شکل‌های زیر مشخص کنید.

ب) جدول زیر را تکمیل نمایید.

اندازه وزنه (بر حسب کیلو گرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (برحسب سانتی‌متر)						

پ) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم، مقادیر f(۱)، f(۴)، f(۸) و f(۱۰) (بر حسب سانتی‌متر) را محاسبه کنید.

ت) نقاط به‌دست آمده از قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم، مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



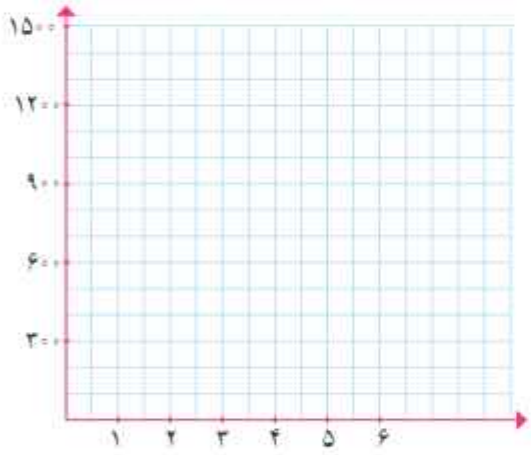
فعالیت

یک کارخانهٔ تولید **لوله‌های آبیاری کشاورزی**[1] در هر ساعت ۰/۳ کیلومتر لوله تولید می‌کند.

اگر متراژ لوله‌ای را که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند، برحسب متر با $f(x)$ نشان دهیم. جدول روبه‌رو را برای $f(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل نمایید.

x بر حسب ساعت	۱	۲	۳	۴	۵
f(x) برحسب متر					

نقاط به‌دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



هر تابع به‌صورت $y=f(x)$ که در آن $y=mx+h$، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

توابع به‌دست آمده در دو فعالیت قبل، هر دو توابع خطّی‌اند.

کتاب و آب
هر دو در بحران‌اند؛
یکی از کم‌مصرفی،
دیگری از پرمصرفی!

۱. کشاورزی یکی از مهم‌ترین بخش‌های جامعه است که ۱۸ درصد تولید ناخالص ملی، ۲۵ درصد اشتغال‌زایی، تأمین ۸۵ درصد غذای جامعه، ۲۵ درصد صادرات غیرنفتی و فراهم کردن بخش عمده‌ای از مواد اولیه مورد استفاده در صنعت را عهده‌دار است. بنابراین رشد و توسعه در این بخش زمینه‌ساز پیشرفت اقتصادی، اجتماعی و صنعتی کشور است. ایران به دلیل موقعیت جغرافیایی خاص، دارای اقلیم خشک و نیمه خشک است. از طرف دیگر، آمار و ارقام موجود در بخش کشاورزی نشان‌دهندهٔ این است که در بسیاری از مناطق در مقابل آب در دسترس، محدودیت زمین وجود نداشته و هرچه امکان صرفه جویی در مصرف آب یا استحصال منابع آبی جدید وجود داشته باشد، می‌توان میزان کشت آبی و نهایتاً میزان تولیدات کشاورزی را بالا برد. بخش کشاورزی با ۹۲ درصد بزرگ‌ترین و مهم‌ترین مصرف کنندهٔ آب در کشور به‌شمار می‌رود که متأسفانه بیش از ۸۰ درصد تلاف منابع آب به دلیل عدم استفاده از فناوری (تکنولوژی)های پیشرفتهٔ آبیاری در این بخش به هدر می‌رود. تعدادی از کارشناسان معتقدند که مدیریت منابع آب کشور در شرایط فعلی مدیریت مناسبی نیست و موجب شده تا طی سال‌های اخیر شاهد کاهش منابع آب‌های زیرزمینی و نیز کاهش سطح زیرکشت کشاورزی در برخی مناطق باشیم. لذا دستیابی به بهبود بهره‌وری آب به‌عنوان شاخص مصرف آب در انواع تولیدات کشاورزی پایدار، امری ضروری است.

رسم نمودار تابع درجه یک

برای رسم نمودار تابع $y=mx+h$ دو نقطه از نمودار تابع را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و سپس آن دو نقطه را به وسیله خطی به هم وصل می‌کنیم.

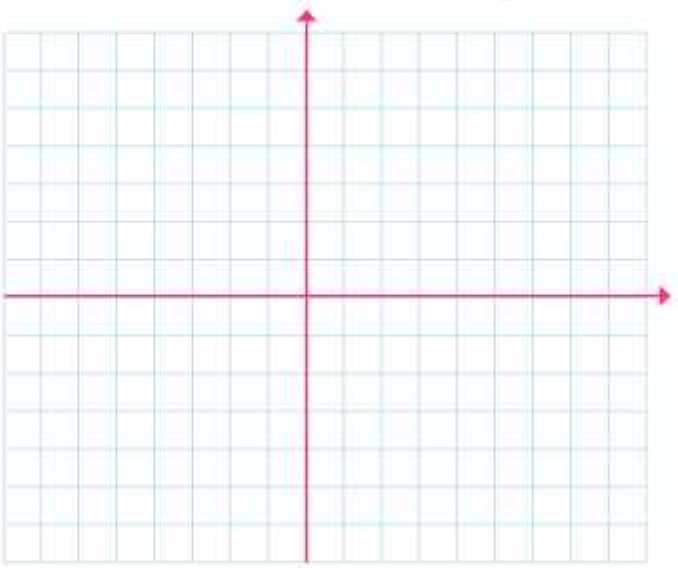
کار در کلاس

در یک تابع خطی $f(۰)=۲$ و $f(۲)=۳$ با توجّه به معادلهٔ خط که در کتاب ریاضیات نهم دیده‌اید، ابتدا m و سپس به کمک آن $f(x)$ را مشخص و نمودار تابع را رسم کنید.

$$m=\frac{۳-\cdots}{\cdots-۰}=\cdots$$

معادله خط:

بنابراین $f(x)=\cdots\cdots\cdots$



کار در کلاس

جدول زیر رابطهٔ بین عمق و دمای سنگ‌ها را در زیر زمین نشان می‌دهد. x **معرف عمق** (بر حسب کیلومتر) و y **معرف دما** (بر حسب سانتی‌گراد) است.

x	۲	۴
y	۷۵	۱۸۵

اگر دمای سنگ‌ها تابع خطی برحسب عمق باشد، ابتدا جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن تابع $y=f(x)$ را مشخص نموده سپس تعیین کنید در چه عمقی دما به ۴۴۰ درجه سانتی‌گراد می‌رسد؟

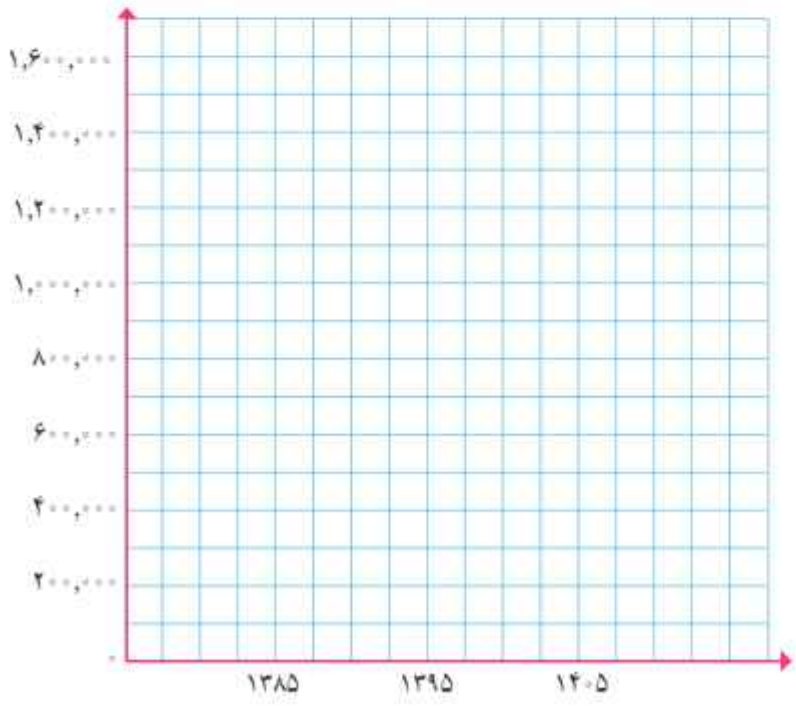
$f(۲)$	$f(۱)$	معادله خط یا ضابطهٔ تابع: $y=f(x)=mx+h$	شیب خط: $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$

کار در کلاس

در برنامه‌ریزی اقتصادی، اجتماعی و مواردی از این قبیل، اولین گام، پیش‌بینی جمعیت در برنامه‌ریزی است. برای برآورد جمعیت، مدل‌های مختلفی وجود دارد که هرکدام ویژگی‌های خود را دارند. انتخاب نوع مدل و استفاده از آن در درجهٔ اول به اطلاعات موجود در زمان و سپس به هدف برنامه‌ریزی بستگی دارد. یکی از این روش‌ها، مدل رشد خطی است. این مدل، الگویی از رشد جمعیت را توصیه می‌کند که در آن میزان جمعیت همچنان با نرخ فعلی خود تغییر می‌کند. (روند رشد جمعیت به صورت تابعی خطی نسبت به متغیّر زمان است.)

نرخ رشد: به میزان افزایش یک کمیت (نظیر جمعیت) در واحد زمان، نرخ رشد گفته می‌شود.

فرض کنیم جمعیت یک شهر در سال ۱۳۸۵ برابر یک میلیون و پنجاه هزار نفر و در سال ۱۳۹۵ برابر یک میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر، مدل الگویی رشد خطی را در نظر بگیریم، با رسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در سال ۱۴۰۵ به‌طور تقریبی برآورد کنید.



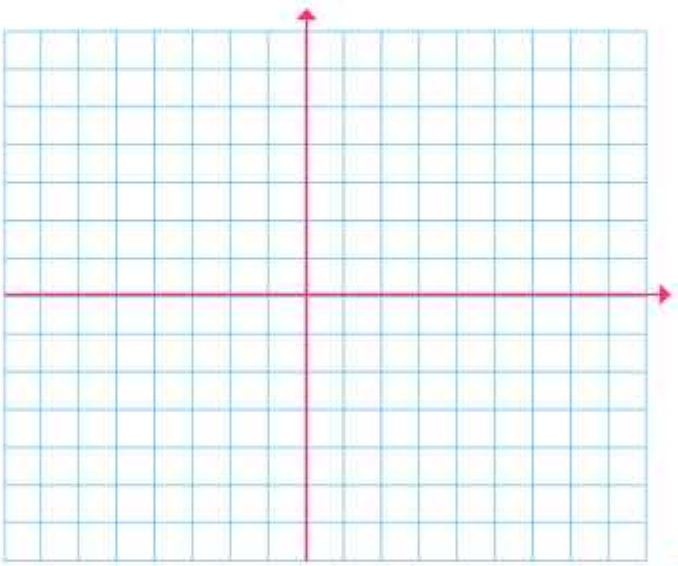
کار در کلاس

ضابطهٔ تابع محیط مستطیل‌هایی را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است، بر حسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.

ـ آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟

کار در کلاس

اگر نمودار تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(-1)=2$ باشد، نمودار و ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.



تمرین

۱. مقادیر m و n را چنان بیابید تا در تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx+n$ داشته باشیم: $f(2)=4$ و $f(1)=1$.

۲. ضابطهٔ تابع خطی f را که از نقاط (۲,۳) و (۴,۱) می‌گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.

۳. در تابع خطی f داریم $f(1)=5$ و $f(2)=8$، مقادیر $f(-3)$ و $f(5)$ را بیابید.

۴. نمـودار تابعی خطی را رسـم کنیـد که دامنهٔ آن برابـر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid ۰\le x\le ۱۰\}$ و از نقطه $M\left|\begin{matrix}۵\\۲\end{matrix}\right.$ بگذرد.

۵. نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(۲)=۷$ اسـت. در این صورت اختلاف $f(۰/۱)$ و $f(-۰/۱)$ را به‌دست آورید.

۶. رابطهٔ بین درجهٔ دما برحسب سانتی گراد و فارنهایت به صورت $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$ است. دمای یک جسم ۲۰ درجهٔ سانتی‌گراد بالا رفته است. دمای آن برحسب فارنهایت چقدر افزایش داشته است؟

۷. یـک شـرکت برای تولیـد x کالا، $C(x)=۳۰۰۰+۵۰x$ تومان هزینه می‌کنـد و هر کالا را ۷۰ تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟

کوه‌های مینیاتوری ــ چابهار

درس ٤

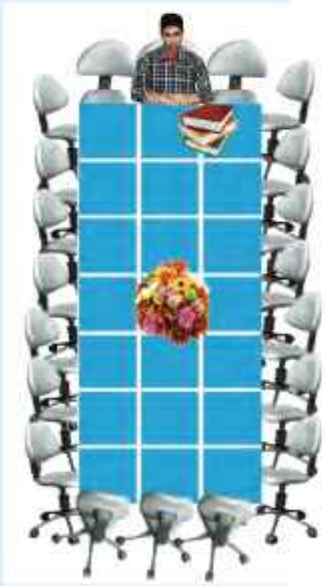
نمودار تابع درجهٔ ۲

فعالیت

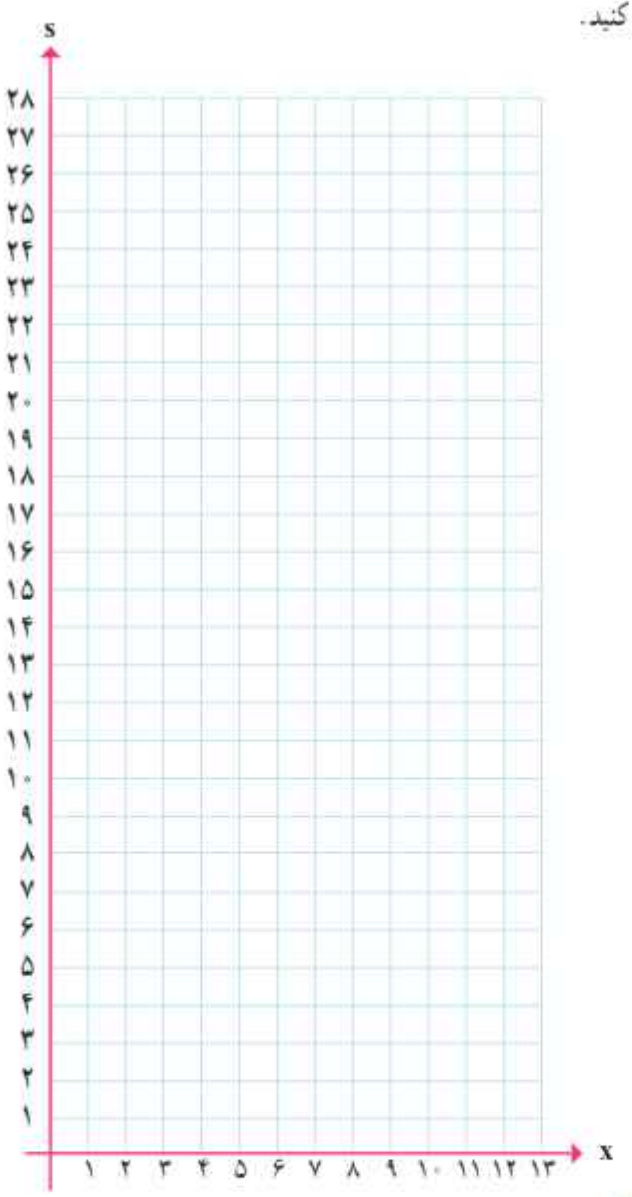
برای برگزاری یک جلسه، با کنار هم قرار دادن تعدادی میز به صورت مربع‌هایی ۱×۱، یک میز مستطیل شکل به محیط ثابت ۲۰ تهیه می‌کنیم. اندازهٔ ضلعی را که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می‌گیرد با x و اندازهٔ ضلع دیگر را با y نشان می‌دهیم همچنین مساحت مستطیل را با s نشان می‌دهیم.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲				۶			۹
y	۹	۸	۷						
s	۹			۲۴				۱۶	
(x,s)	(۱,۹)	(۲,۱۶)			(۵,۲۵)			(۸,۱۶)	



ب) اگر هر زوج مرتب (x, s) را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات محورهای زیر مشخص کنید.



فعالیت

یک شرکت نقاشی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ‌آمیزی روزانهٔ هر مترمربع از دیوار بیرونی یک کارخانه تعیین می‌کند، مبلغ $x - ۱۲۰۰$ تومان است. x میزان رنگ‌آمیزی روزانهٔ گروه بر حسب مترمربع است. هزینهٔ رفت و آمد و صرف غذای گروه به‌طور ثابت روزانه ۳۰۰۰۰ تومان و همچنین مترمربعی ۲۰۰ تومان هزینهٔ لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر مترمربع رنگ‌آمیزی به ازای $x=۲۰۰$ (۲۰۰متر کار در یک روز) و $x=۳۰۰$ چقدر است؟

ب) هزینهٔ گروه در یک روز به ازای $x=۲۰۰$ و $x=۳۰۰$ چقدر است؟

پ) اگر تابع سود گروه را با P نشان دهیم $P(۲۰)$، $P(۱۰۰)$، $P(۲۰۰)$، $P(۳۰۰)$ را محاسبه کنید.

$P(۲۰) = ۲۰\times(۱۲۰۰-۲۰) - (۳۰۰۰۰+۲۰\times۲۰۰) = -۱۰۴۰۰$

$P(۱۰۰) =$

$P(۲۰۰) =$

$P(۳۰۰) =$

ت) حاصل $P(x)$ را به دست آورید و آن را ساده کنید.

ث) جدول زیر را برای $P(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل کنید.

x	۲۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰
P(x)	-۱۰۴۰۰	۶۰۰۰۰								

ج) نقاط به‌دست‌آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

ج) چرا بعضی از نقاط، پایین‌تر از محور افقی قرار می‌گیرند؟ آیا هرچه متراژ بیشتری رنگ‌آمیزی شود، گروه سود بیشتری کسب می‌کند؟

رسم نمودار تابع درجه دوم

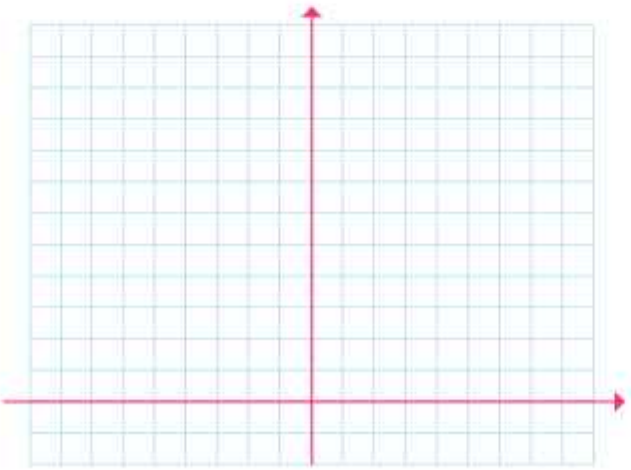
معادلهٔ تابع درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت $y=ax^2+bx+c$ است که در آن $a\neq 0$ می‌باشد. نمودار آن به یکی از دو صورت $\cup$ یا $\cap$ است که به آن سهمی می‌گوییم. در سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$، نقطه‌ای به طول $x=-\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض‌ها رسم می‌شود، محور تقارن سهمی است.

- اگر در معادلهٔ سهمی $a>0$ باشد، شکل سهمی به صورت $\cup$ خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.
- اگر در معادلهٔ سهمی $a<0$ باشد، شکل سهمی به صورت $\cap$ خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار است.

فعالیت

ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^2$ را رسم کنید.

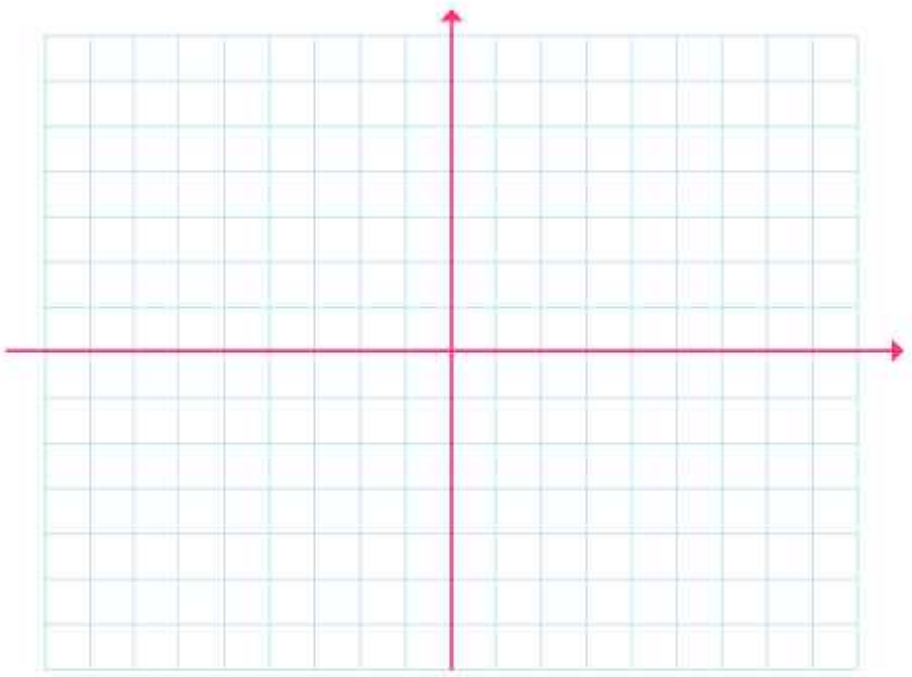
x	...	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	...
y	...		۹			۰					...



کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=4-x^2$ را رسم کنید.

x	...	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۳	۴	...
y	...		...			۴				...



کار در کلاس

نقاط رأس سهمی‌هایی را که معادله‌های آنها داده شده است، مشخص کنید.

الف) $y=x^2$

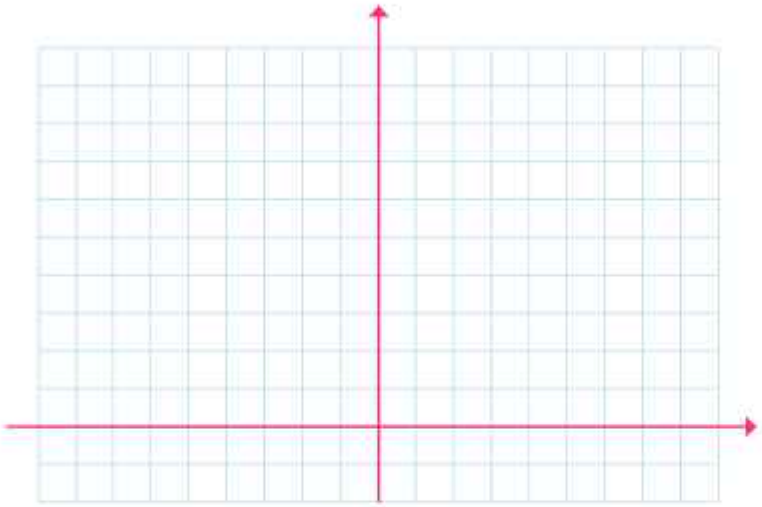
ب) $y=4-x^2$

پ) $y=2x^2-4x+1$

ت) $y=2(x-1)^2+1$

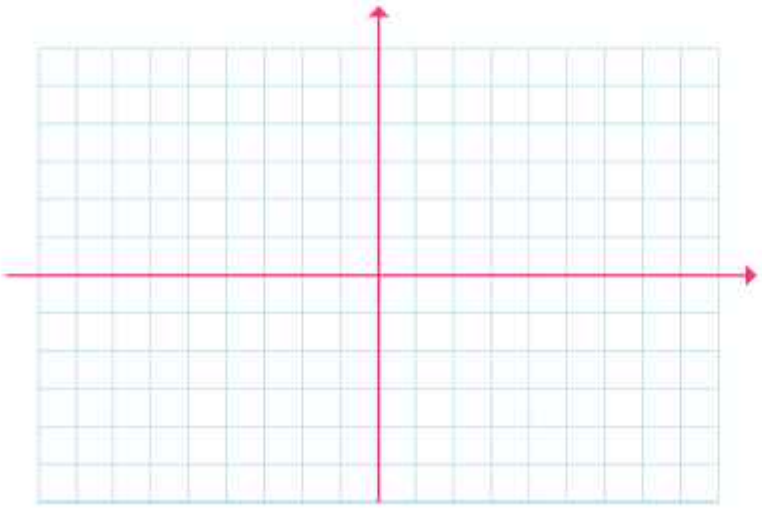
کار در کلاس

الف) رأس سهمی به معادلهٔ $y=2(x-1)^2+1$ را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.



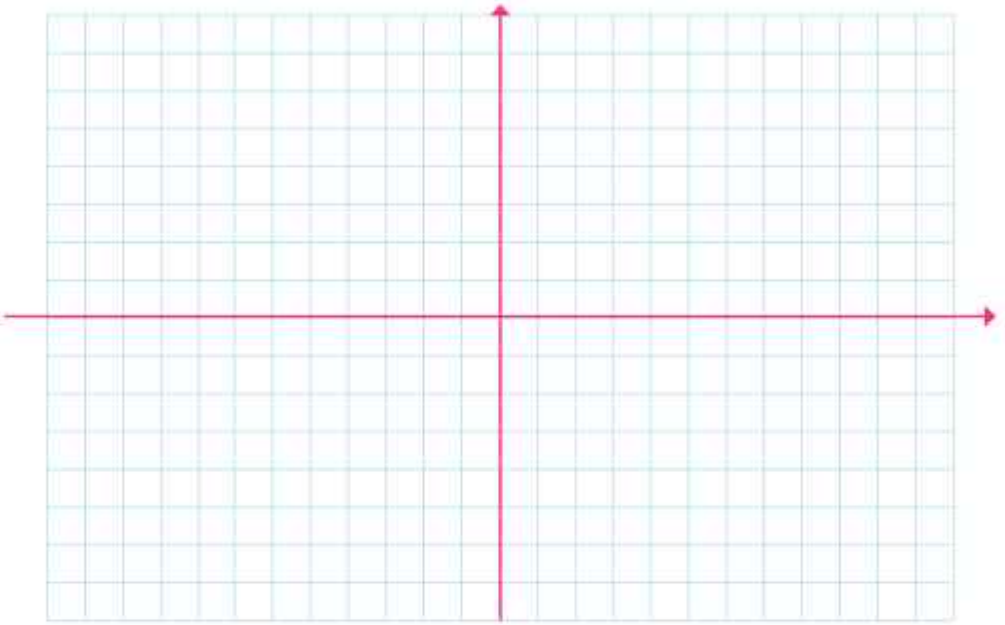
ب) جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادلهٔ $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+5$ را رسم کنید.

x	...	-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	...
y	...				۵				...

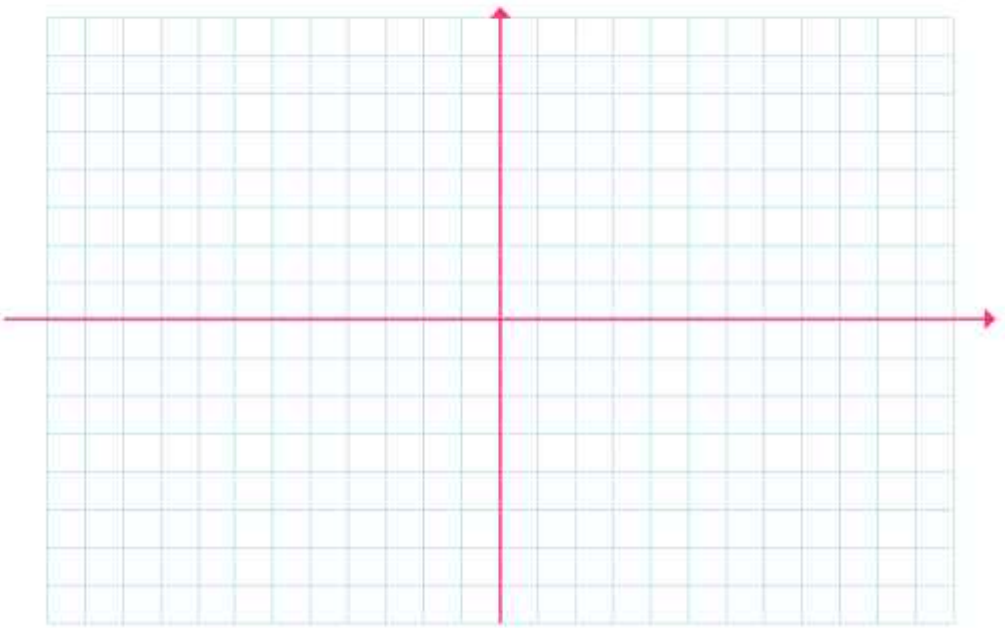


کار در کلاس

۱. نمودار توابع درجهٔ دوم $y=-x^2+6x-1$ و $y=2x^2+4x+1$ را رسم کنید.



۲. نمودار توابع $y=-x^2+6x+1$ و $y=x^2+4x-2$ را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخورد این دو سهمی را مشخص کنید.



تمرین

۱. نمودار سهمی‌های به معادله‌های $y=x^2-2x$ و $y=-(x-1)^2+1$ و $y=x^2+4x+1$ را رسم کنید.

۲. اگر تابع درآمد به صورت $y=-\frac{1}{2}x^2+30x$ و تابع هزینه به‌صورت $y=18x+40$ باشد، ماکسیمم مقدار سود را مشخص کنید.

۳. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازهٔ یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با s نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیمم می‌شود.

۴. اگر $2x+a=100$ باشد x و a را طوری بیابید که $y=xa$ ماکسیمم شود.

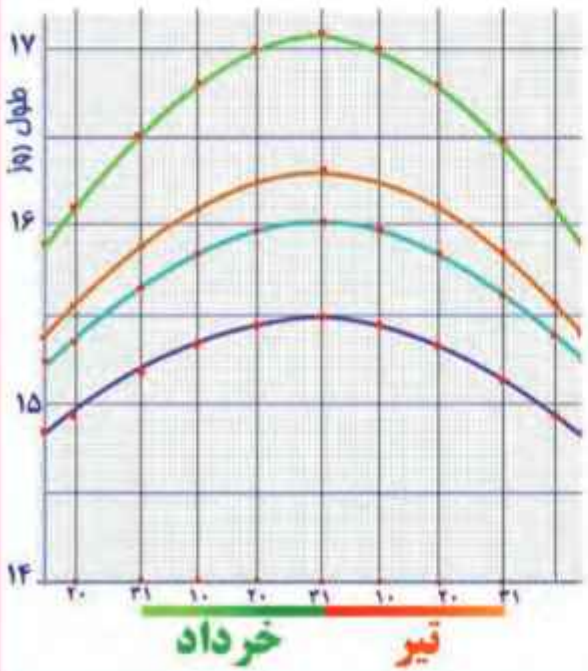
۵. در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. این تولیدی هریک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینهٔ آن برابر $c(x)=x^2+40x+100$ باشد:

الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

پ) بیشترین سود روزانهٔ این کارگاه چقدر است؟

خواندنی



در روز ۳۱ خرداد، محور زمین در قطب شمال بیشترین انحراف به سمت خورشید را دارد. در این روز، خورشید در هنگام ظهر در بالاترین زاویهٔ ممکن در آن محل قرار دارد. دقت کنید که روز ۳۱ خرداد طولانی‌ترین روز سال در نیم کره شمالی است. اما در عرض‌های بالاتر، این زمان بیشتر است. به عبارت دیگر هر چه به خط استوا نزدیک شویم، طول روز در ۳۱ خرداد عددی کوچک‌تر و هرچه از خط استوا دور شویم عدد بزرگ‌تری می‌باشد. نمودار مقابل نشان می‌دهد که طول روز در ایران در ایام خرداد ماه و تیرماه در شهرهای ایران چه‌اختلافی با هم دارند.

فصل سوم

کار با داده‌های آماری

درس۱ گردآوری داده‌ها

درس۲ معیارهای گرایش به‌مرکز

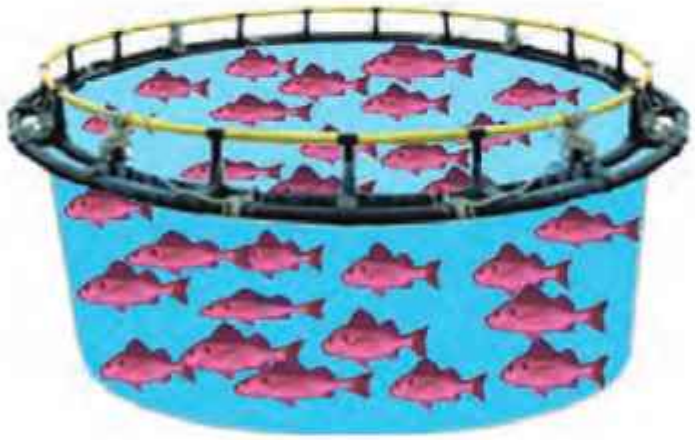
درس۳ معیارهای پراکندگی

درس ۱

گردآوری داده‌ها

فعالیت

می‌خواهیم وزن ماهی‌های یک حوضچهٔ پرورش ماهی را به منظور فروش آنها تخمین بزنیم.
نخست از قسمت عمیق و در مرحلهٔ بعد، از قسمت کم‌عمق ۵ ماهی صید می‌کنیم.



۱. آیـا انتخاب ۵ ماهی از قسـمت عمیق، تخمین خوبی از وزن ماهی‌هـای حوضچه به ما می‌دهد؟ یعنی آیا می‌توان برای فروش آنها اعلام آمادگی کرد؟

۲. به نظر شما کدام تخمین بیش از مقدار واقعی است و کدام یک کمتر از مقدار واقعی؟

۳. اگر شما امکان صید ۵ ماهی داشتید، آنها را چگونه انتخاب می‌کردید تا منجر به تخمین بهتری از وزن ماهی‌های حوضچه می‌شد؟ (فرض کنید ماهی‌ها، همانند شکل در حوضچه پخش شده‌اند و تحرک زیادی ندارند).

۴. اگر از نحوهٔ پخش شدن ماهی‌ها اطلاعی نداشتیم، بهتر بود ۵ ماهی را چگونه انتخاب می‌کردیم؟ آیا انتخاب تصادفی چند بخش از حوضچه (مثلاً زمانی که آن را شطرنجی کرده‌ایم) به ما کمک می‌کند ماهی‌های انتخابی معرف بهتری از کل ماهی‌ها باشند؟

از قدیم گفته‌اند که مشت نمونهٔ خروار است، ولی نه هر مشتی. چرا؟ اگر نمونه تصادفی انتخاب شود، معرف جامعه خواهد بود.

داده‌ها واقعیت‌هایی دربارهٔ یک چیزند که در محاسبه، استنباط، یا برنامه‌ریزی به کار می‌روند.

واحد آماری به هر یک از افراد یا چیزهایی می‌گویند که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود.

مجموعهٔ کلّ واحدهای آماری را **جامعهٔ آماری** می‌نامند.

هر زیرمجموعه از جامعهٔ آماری را که با روش مشخصی انتخاب شده باشد، یک **نمونه** می‌نامند.

نمونه‌ای را که در آن، همهٔ اعضای جامعه، شانس انتخاب یکسان در نمونه را داشته باشند **نمونهٔ تصادفی** می‌نامند.

در مثال حوضچهٔ ماهی، هر ماهی درون حوضچه یک واحد آماری است. به کل ماهی‌های حوضچه جامعه گفته می‌شود. اگر وزن تک‌تک ماهی‌ها را در اختیار داشته باشیم داده‌های جامعه را داریم. وزن نمونهٔ ۵ ماهی از قسمت کم‌عمق، معرف داده‌های یک نمونهٔ پنج‌تایی است. اگر ۵ ماهی با یک روش تصادفی از حوضچه استخراج شود، عملاً یک نمونهٔ تصادفی پنج تایی از حوضچه در اختیار داریم.

تفاوت زیادی بین «عدد» در ریاضی و «داده» در آمار وجود دارد. به عبارت دیگر عدد ۵۰ یک مفهوم در ریاضی دارد و داده‌ای که مقدار آن ۵۰ است، علاوه بر مقدار آن حاوی اطلاعات زیادی است. به‌عنوان مثال، این داده می‌تواند متوسط تلفات روزانهٔ جاده‌های کشور در یکی از سال‌های اخیر باشد.

فعالیت

می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان یک مدرسه را گردآوری کنیم. برای این منظور چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟

آمارگیری: گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن

آمارگیر: کسی که آمارگیری را انجام می‌دهد.

اگر قرار شد آمارگیر باشیم، می‌توانیم جدولی به صورت زیر تکمیل کنیم.

مثالی از جدول طراحی‌شده برای ثبت داده‌ها

اندازه طول قد	چوب‌خط برای شمارش	تعداد دانش‌آموزان
کوتاه‌تر از ۱۴۰ سانتی‌متر		
۱۴۹-۱۴۰ سانتی‌متر		
۱۵۹-۱۵۰ سانتی‌متر		
۱۶۹-۱۶۰ سانتی‌متر		
۱۷۰ سانتی‌متر یا بلندتر		

چگونه مطمئن می‌شوید که دانش‌آموزی از قلم نیفتاده است؟ چه راهکاری برای این منظور پیشنهاد می‌کنید؟

آمارگیری زحمت زیادی برای آمارگیر دارد. آیا راه‌حل ساده‌تری برای انجام آن دارید؟ یکی از مرسوم‌ترین روش‌های آمارگیری، استفاده از پرسش‌نامه است. پرسش‌نامه شبیه همان جدولی است که هنگام ثبت‌نام در مدرسه، شما یا والدین، آن را تکمیل کرده‌اید. پرسش‌نامه را می‌توانند واحدهای جامعه یا نمونه تکمیل کنند.

مثالی از پرسش‌نامهٔ طراحی‌شده

سلام.

می‌خواهیم طول قد دانش آموزان مدرسه را آمارگیری کنیم.
لطفاً یکی از گزینه‌ها را انتخاب کنید.
طول قد شما چقدر است؟

- کوتاه‌تر از ۱۴۰ سانتی‌متر ☐
- ۱۴۹-۱۴۰ سانتی‌متر ☐
- ۱۵۹-۱۵۰سانتی‌متر ☐
- ۱۶۹-۱۶۰سانتی‌متر ☐
- ۱۷۰ سانتی‌متر یا بلندتر ☐

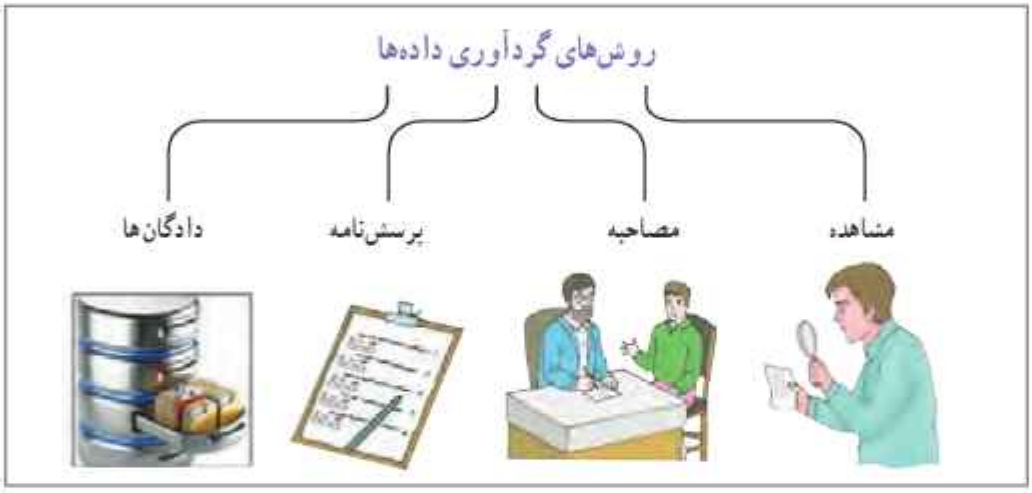
برای به انجام رساندن یک آمارگیری باید پاسخ سؤال‌های زیر را بدانید:

۱. می‌خواهید چه چیزی پیدا کنید؟ چرا؟
۲. چه داده‌هایی را باید گردآوری کنید؟ چگونه تصمیم می‌گیرید؟
۳. کدام راه، بهترین راه گردآوری داده‌ها است؟ چرا؟ آیا به ابزار خاصی نیاز دارید؟
۴. به چه مقدار داده نیاز دارید؟ چگونه تصمیم می‌گیرید؟
۵. داده‌های شما باید چقدر دقت داشته باشند؟ چرا؟
۶. داده‌هایتان را چگونه ثبت می‌کنید؟ چرا این روش را انتخاب کرده‌اید؟
۷. داده‌ها را چگونه ارائه می‌کنید؟ چرا؟
۸. آیا داده‌ها از الگوی خاصی پیروی می‌کنند؟ داده‌ها بیان‌کننده چه هستند؟
۹. چه نتیجه‌گیری یا پیشگویی خاصی می‌توانید از داده‌ها ارائه کنید؟
۱۰. آیا نتایج با آنچه انتظار داشتید، تطبیق دارد؟
۱۱. چگونه نتایج کار را ارائه می‌کنید؟ برای چه کسانی ارائه می‌کنید؟
۱۲. با توجه به نتایج به دست آمده، آیا می‌توانید سؤالات دیگری را نیز بررسی کنید؟ به نظر شما در مرحلهٔ گردآوری داده‌ها به کدام‌یک از سؤالات فوق باید پاسخ داده شود؟

کار در کلاس

۱. چه راه دیگری برای آمارگیری طول قد دانش آموزان یک مدرسه پیشنهاد می کنید؟

۲. فرض کنید زمان لازم را برای گردآوری همهٔ داده‌های دانش آموزان در اختیار نداشته باشید. اگر بخواهیم نمونه‌ای را انتخاب و آمارگیری کنیم، چه راهی پیشنهاد می کنید که نمونه به‌صورت تصادفی انتخاب شود؟



۱. مشاهده: گردآوری داده‌ها بدون نیاز به فرد پاسخگو، مانند شمارش تعداد وسایل نقلیهٔ عبوری از یک تقاطع در هر ساعت یا اندازه‌گیری وزن محصولات یک باغ میوه.

۲. پرسش‌نامه: مجموعهٔ سؤالات از پیش تعیین‌شده که توسط تعدادی پاسخگو تکمیل می‌شود. این روش مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات از مردم است. مرکز آمار ایران هر ۱۰ سال یک‌بار با استفاده از پرسش‌نامه اطلاعات همهٔ خانوارهای ساکن در ایران را جمع‌آوری می‌کند. به این فرایند، سرشماری نفوس و مسکن می‌گوییم.

۳. مصاحبه: معمولاً بین دو نفر صورت می‌گیرد، یکی مصاحبه‌گر (همان آمارگیر) و دیگری مصاحبه‌شونده یا پاسخگو است. مثلاً اگر بخواهیم دربارهٔ مسائل فرهنگی کاهش ترافیک پژوهش کنیم، مصاحبه از صاحب‌نظران راه‌حل مناسبی برای گردآوری داده‌هاست. از این روش، بیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر اطلاع کافی از همهٔ پاسخ‌های ممکن را ندارد.

۴. دادگان‌ها: شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره شده‌اند. در بسیاری از موارد، داده‌ها را می‌توان از اطلاعاتی که قبلاً ذخیره شده‌اند، به دست آورد. اگر قرار است تحقیقی در مورد نمره‌های دروس ریاضی استان‌ها انجام شود، اطلاعات ثبتی ادارهٔ کل آموزش و پرورش راه‌گشا خواهد بود. از سوی دیگر به دلیل تولید داده‌ها به‌صورت خودکار، در بسیاری از مؤسسات و سامانه‌ها، استفاده از این روش برای گردآوری داده‌ها به‌سرعت رواج یافته است.

تمرین

کدام روش گردآوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

۱. میزان رضایت مشتریان بانک از نحوهٔ برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آنها.

۲. سن همهٔ دانش‌آموزان مدرسه بر حسب ماه در پایهٔ دهم.

۳. تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر.

شعارهای برتر
سال جهانی آمار

آمار، تصویر دیروز،
آینهٔ امروز، دورنمای فردا

❁❁❁

آمار، سنجش گذشته،
شناخت حال،
درک آینده

کار در کلاس

الف) کدام روش برای گردآوری هر یک از داده‌ها مناسب است؟

۱. تعداد قلم‌های هر دانش‌آموز در یک کلاس.

۲. ساعات خواب دانش آموزان کلاس درس شما در شب گذشته.

۳. طول قد دانش آموزان یک کلاس.

ب) می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان یک کلاس یا مدرسه را به یکی از سه روش زیر **آمارگیری** کنیم. هریک از این روش‌ها محدودیت‌هایی دارند. چگونه می‌توان این محدودیت‌ها را از بین برد؟

پرسش‌نامه: اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان‌بر است.

مشاهده: اگر به دقت زیادی نیاز داشته باشیم، مناسب نیست.

دادگان‌ها: همیشه اطلاعات ثبتی در اختیار نیست.

خواندنی

آمارگیری را می‌توان به روش‌هایی بسیار سریع‌تر یا کم‌هزینه‌تر مانند آمارگیری پستی، تلفنی، اینترنتی یا پیامکی انجام داد. همچنین می‌توان با ابزاری نظیر «**گوگل فُرم**» یک پرسش‌نامه طراحی کرد و آن را به نشانی نمونهٔ انتخابی ارسال کرد و نتایج را از «گوگل فرم» بازیابی کرد.

فعالیت

قرار است دربارهٔ افرادی که از کوه دنا بالا رفته‌اند، پژوهشی آماری انجام دهیم. واحدهای آماری این پژوهش، همهٔ افرادی هستند که توانسته‌اند به قلّه برسند. هدف از این پژوهش می‌تواند فرهنگی یا علمی باشد. بسته به نوع پژوهش، یک یا چند ویژگی این افراد (مانند طول قد یا جنسیت) مورد نیاز است. به هر یک از این ویژگی‌ها که مورد پژوهش قرار می‌گیرد متغیر می‌گویند. سایر متغیرها می‌توانند مواردی مانند : سن، وزن، ملّیت، میزان تحصیلات و درآمد باشند. متغیرهای مورد بررسی در یک پژوهش ممکن است کمّی یا کیفی باشند.

متغیر : هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که قرار است بررسی شود.
متغیر کمّی: متغیّری است که مقادیر عددی می‌گیرد و برای آن عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و معدل‌گیری قابل انجام است.
متغیر کیفی: متغیری است که صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیا در گروه‌ها به‌کار می‌رود و لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرد.

در مثال کوهنوردان دنا، سن، وزن، قد و درآمد یک کوهنورد، متغیرهای کمّی هستند. متغیّرهای کیفی معمولاً از نوع مشاهدات غیر عددی‌اند و در مثال کوهنوردان دنا ، جنسیت و ملّیت را در بر می‌گیرند. به‌عنوان مثال، جنسیت برای دسته‌بندی افراد به مرد و زن استفاده می‌شود.

پارامتر جامعه: یک مشخصهٔ عددی است که توصیف‌کنندهٔ جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است. مثلاً اگر داده‌های مربوط به تک‌تک کوهنوردان را داشته باشیم، یعنی به داده‌های جامعه دسترسی داریم. نسبت مردان در کل جامعهٔ کوهنوردان، معرف یک **پارامتر** است.

اگر داده‌های بعضی از کوهنوردان را داشته باشیم؛ یعنی داده‌های نمونه را در اختیار داریم. نسبت مردانِ کوهنورد به این داده‌های نمونه‌ای را، آماره (مقدار آماره) گویند. آماره‌ها از یک نمونه به نمونهٔ دیگر تغییر می‌کنند. این در حالی است که پارامترهای جامعه همیشه ثابت‌اند. چرا؟

در بسیاری از موارد، آمارگیری از کل جامعه امکان پذیر نیست. بنابراین علی‌رغم اینکه پارامتر دارای مقدار ثابتی است، این مقدار مجهول است و به همین دلیل از آماره‌ها برای تخمین پارامترها استفاده می‌کنند.

آمارهٔ نمونه: مشخصه‌ای عددی که توصیف کنندهٔ جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به‌دست می‌آید.

مثال: ادارهٔ کشاورزی استان خوزستان در حال ارزیابی هندوانه‌های آمادهٔ برداشت است. در این بررسی، هندوانه‌ها همان واحدهای آماری هستند. اگر پژوهشگران وزن هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند، متغیر، «وزن» آنهاست. وزن یک متغیر کمّی است، زیرا با مقادیر عددی ارائه می‌شود. اگر وزن تک‌تک هندوانه‌های این زمین بررسی شود، سرشماری از جامعه انجام داده‌ایم (که امکان پذیر نیست). متوسط وزنِ همهٔ هندوانه‌های قابل برداشت در این زمین، «پارامتر» است.

حال فرض کنیم پژوهشگران تصمیم دارند بر اساس معیار «مزه» هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند. در این حالت، مزهٔ هندوانه‌ها را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: بد، قابل قبول و خوب. حال که می‌خواهیم مزهٔ هندوانه‌ها را امتحان کنیم، مطالعه به بخشی از کل هندوانه‌ها محدود می‌شود. در اینجا «مزه» متغیری کیفی است. از آنجا که نمی‌توانیم همهٔ هندوانه‌ها را مزه مزه کنیم، فقط بخشی از هندوانه‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند؛ پس باید «نمونه» بگیریم. نسبت هندوانه‌های دارای مزهٔ «خوب» در نمونه، یک «آماره» است.

محدودیت‌های سرشماری عبارت‌است از:
۱. هزینهٔ زیاد
۲. زمان‌بر بودن
۳. خطای بیشتر در گردآوری داده‌ها
۴. امکان استفاده در بررسی‌های مخرب (واحدهای انتخاب شده را از بین می‌برند) ندارد.

کار در کلاس

یک شبکهٔ تلویزیونی می‌خواهد نسبت دارندگان تلویزیون در شیراز را بداند، که برنامهٔ جدید این شبکه را حداقل یک بار در هفته تماشا می‌کنند. بدین منظور یک گروه ۱۰۰۰ نفری از دارندگان تلویزیون را در این شهر بررسی می‌کند.

الف) داده‌ها و متغیرهایی را که بررسی می‌شوند، مشخص کنید.

جواب : داده‌ها اطلاعات گروه ۱۰۰۰ نفری دارندگان تلویزیون در شیرازند، و متغیر، تماشای تلویزیون است که پاسخ آن «تماشا می‌کند» یا «تماشا نمی‌کند» افراد مورد بررسی است.

ب) آیا این داده‌ها یک نمونه‌اند؟ اگر بله جامعهٔ آماری کدام است؟

پ) متغیر کمّی است یا کیفی؟

ت) چند متغیر کمّی را که ممکن است در اینجا جالب باشد، مشخص کنید.

جواب : سن، درآمد، ....

ث) نسبت افرادی در نمونه که برنامهٔ جدید را تماشا می‌کنند، آماره است یا پارامتر؟ (تعداد اعضای مورد نظر تقسیم بر تعداد کل اعضای یک مجموعه را نسبت می‌گوییم.)

مقیاس‌های اندازه‌گیری

داده‌ها را به دو گروه کمّی و کیفی تقسیم کردیم. از نگاهی دیگر، می‌توان متغیرهای داده‌ها را در چهار **مقیاس اندازه‌گیری** دسته‌بندی کرد. اندازه‌گیری در تعریف به معنی ایجاد تفکیک بین افراد یا اشیا است. وقتی دو نوزاد دوقلو را نام‌گذاری می‌کنیم تا آنها را تفکیک کنیم، در واقع اندازه‌گیری کرده‌ایم. بسته به دقتی که این اندازه‌گیری صورت می‌گیرد آن‌را به چهار مقیاس اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی تقسیم می‌کنیم. هدف از شناسایی این مقیاس‌ها تعیین نوع محاسبهٔ مناسب برای داده‌ها است؛ نظیر ترتیب، محاسبهٔ اختلاف و نسبت گرفتن.

اسمی: این مقیاس برای متغیرهایی است که شامل نام‌ها، برچسب‌ها و گروه‌ها می‌شود. در اینجا هیچ معیاری که با آن بتوان داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد وجود ندارد؛ مانند گروه خونی انسان‌ها و شمارهٔ دانش‌آموزی. کدهای عددی در این مقیاس درواقع عدد نیستند؛ بلکه صرفاً برای گروه‌بندی به کار می‌رود.

ترتیبی: این مقیاس با استفاده از الفاظ، ضمن ایجاد تفکیک بین افراد و اشیا، ارجحیت نیز قائل می‌شود. مقیاس ترتیبی برای متغیرهایی است که قابل مرتب کردن هستند و در عین حال محاسبهٔ اختلاف بین مقادیر داده‌ها، یا امکان‌پذیر نیست یا بی‌معناست؛ مانند رتبهٔ دانش‌آموزان در یک کلاس. اگر رتبه‌های اول تا سوم معدل ۱۹، ۱۸، ۱۶ کسب کرده باشند به آنها به ترتیب رتبهٔ ۱، ۲، ۳ می‌دهیم و توجه نمی‌کنیم که اختلاف نمره‌های آنها چقدر است.

فاصله‌ای: این مقیاس به دلیل استفاده از لوازم با قواعد دقیق اندازه‌گیری ویژگی افراد یا اشیا به‌دقت اندازه‌گیری می‌شود. به‌بیان دیگر مقیاس فاصله‌ای برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن هستند و همچنین اختلاف بین مقادیر داده‌ها بامعناست؛ مانند درجهٔ حرارت در شهرهای مختلف برحسب سلسیوس. مقادیری که به دو نفر یا دو شیء داده می‌شود صرفاً بیان‌کنندهٔ فاصله بین آنها ست. درنتیجه صفر در این مقیاس قراردادی است. مثلاً اگر دمای بوشهر ۲۰ و تهران ۱۰ درجه سلسیوس باشد نمی‌توان گفت دمای هوای بوشهر دو برابر تهران است؛ ولی می‌توان گفت که اختلاف دما ۱۰ درجهٔ سلسیوس است.

نسبتی: این مقیاس برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن هستند و اختلاف بین مقادیر داده‌ها، و نسبت مقادیر داده‌ها نیز بامعنا است. اغلب متغیرهای فیزیکی مانند نمره، وزن و قد دانش‌آموزان و متغیرهایی که با واژهٔ تعداد شروع می‌شوند در این مقیاس اندازه‌گیری می‌شوند. در این مقیاس صفر به معنای نبود ویژگی در فرد یا شیء است.

اگر فقط یک متغیر از داده‌ها اندازه‌گیری شـده باشد، به‌جای ذکر «مقیاس متغیر» از واژهٔ «مقیاس داده‌ها» استفاده می‌کنند.

کار در کلاس

نوع متغیر داده‌های زیر را مشخص کنید:

الف) محسن، محمود، محمد و میثم همگی اسامی مذکر هستند.

ب) در یک دبیرستان، ۳۱۹ دانش‌آموز فارغ‌التحصیل وجود دارد. احمد رتبهٔ بیست و پنجم، رضا رتبهٔ نوزدهم، صادق رتبهٔ دهم و جواد رتبهٔ چهارم را کسب کرده است و می‌دانیم که رتبهٔ یک، بهترین است.

پ) دمای بدن ماهی‌های قزل‌آلای رودخانه هراز (برحسب درجهٔ سلسیوس).

ت) طول ماهی‌های قزل‌آلا در رودخانهٔ هراز.

تمرین

داده‌های زیر مربوط به یک نمایندهٔ مجلس است. در هریک از سؤالات زیر، نوع داده‌ها را مشخص کنید.

الف) نام نماینده حسین ایرانی است.

ب) این نماینده ۵۸ سال سن دارد.

پ) سال‌هایی که این نماینده در مجلس انتخاب شده است، ۱۳۸۶، ۱۳۹۰ و ۱۳۹۴ است.

ت) مجموع حقوق این نماینده در سال ۱۳۹۴، ۶۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است.

ث) این نماینده در حال بررسی لایحهٔ پیشنهادیِ حفاظت از منابع آبی کشور است. گزینه‌های موردنظر، حمایت کامل، حمایت، بی‌طرف، مخالف و کاملاً مخالف است.

ج) وضعیت تأهل این نماینده: متأهل

ج) می‌گوینـد این نماینده در رأی‌گیری لایحهٔ مرتبط با آموزش عمومی، هفتمین نفری اسـت که از آن حمایت کرده است.

شعارهای برتر
سال جهانی آمار

بهترین برنامه‌ریزی
مستلزم بهترین آمار
***
با آمار بهتر بفهمیم،
بهتر تصمیم بگیریم

آمار چیست؟

علوم تجربی نظیر کشاورزی و پزشکی نیازهای اساسی بشر را رفع می‌کنند. در این علوم، یقین کامل برای حل مسئله وجود ندارد، بسیار کاربردی‌اند و مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک پزشک معمولاً به‌صورت دقیق بیماری را تشخیص نمی‌دهد و داروی بیماری نیز به همین وضع دچار است. ولی پزشک بر اساس تجربه حکم بـه بیماری می‌دهـد و دارو تجویز می‌کند و در اکثر مواقع نیز نتیجه می‌گیرد. از سـوی دیگر در علوم ریاضی روابط به‌صورت صد درصد حاکم هستند و هیچ شک و شبهه‌ای به آن راه ندارد.

وجود رابطه بین برخی پدیده‌ها در علوم تجربی باعث کشف حقایقی است که موجب پیشرفت آنها می‌شود. معمولاً روابـط حاکم بر علوم تجربی را نمی‌توان به‌صورت ریاضی بیان کرد. علم آمار راهی برای بیان ریاضی چنین پدیده‌هایی است.

فعالیت

به نظر شـما یک شـهروند در زندگی روزمرهٔ خود از اطلاعات بیان شـده در دو مثال زیر، چه استفاده‌ای می‌کند؟ این اطلاعات در رسانه‌ها منتشر شده‌اند.

■سلامت

- **بیشترین** آسیب‌دیدگی در منازل، افتادن یا زمین خوردن است.
- پنج **درصد** افراد به واکسن آنفلوآنزا واکنش شدید نشان می‌دهند.
- افراد سیگاری **دو برابر** دیگران در معرض سرطان قرار دارند.
- مصرف روزانهٔ ۵ نوع میوه و سبزی **بیشتر** ویتامین‌های مورد نیاز بدن را تأمین می‌کند.

■حمل و نقل

- **اولین** دلیل تماس با امداد خودرو فراموش کردن کلید داخل خودرو است.
- **بیشـتر** رانندهای مرد و زن یک کشـور خارجی، در پشـت چراغ قرمز به ترتیب با بینی خود کلنجار می‌روند و در آینه نگاه می‌کنند.
- راندن بین خطوط راهنمایی در اتوبان‌ها باعث **کاهش** ۳۰ درصدی ترافیک می‌شود.
- **متوسط** تعداد کشته‌های تصادفات در حدود ۵۰ نفر در روز اعلام شده است.

چگونه این اطلاعات را به دسـت آورده‌اند؟ آیا تعریف دقیق کلمات پررنگ شده را حدس می‌زنید؟ جامعه، و پارامتر یا نمونه و آماره را در هریک از مثال‌ها مشخص کنید.

تصمیم‌گیری یکی از مهم‌ترین جنبه‌های زندگی ماست. ما بر اساس اطلاعاتمان و ارزش‌هایمان تصمیم‌گیری می‌کنیم. روش‌های آماری برای بررسـی این اطلاعات به ما کمک می‌کنند. به‌علاوه، آمار در شـرایطی هم که

با عدم قطعیت در تصمیم‌گیری روبه‌روییم، به یاری ما می‌آید. چگونه به اطلاعات گزارش‌شده در فعالیت قبل دست‌یافته‌اند؟ به‌عنوان مثال، اگر در صدد برآورد نسبت افرادی هستیم که به واکسن آنفلوآنزا واکنش شدید نشان می‌دهند، بدون تزریق بر روی همهٔ افرادی که مایل به انجام آن هستند، آمار روش‌های مناسبی را پیش رویمان می‌گذارد. روش‌های آماری ما را قادر می‌سازند تا با نگاه کردن به اطلاعات به دست آمده از مجموعهٔ کوچکی از افراد یا اقلام، برای گروه‌های بزرگ‌تری از این افراد یا اقلام تصمیم‌گیری کنیم. شیوهٔ تحلیل داده‌ها، در کنار قواعد استنباطی، موضوعات اصلی مطالعات آماری را تشکیل می‌دهند.

به مطالعهٔ نحوهٔ گردآوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر داده‌ها برای استخراج اطلاعات و تصمیم‌گیری، آمار گفته می‌شود.

گفتنی است که روش‌های آماری به‌تنهایی نمی‌توانند معجزه کنند؛ این روش‌ها می‌توانند به ما کمک کنند تا تصمیم‌هایی بگیریم؛ اما نه هر تصمیمی. به یاد داشته باشید که حتی یک روش آماری مناسب، نمی‌تواند دقیق‌تر یا صحیح‌تر از داده‌ها و حقایق اصلی باشد. در نهایت، نتایج آماری باید توسط فردی که نه‌تنها روش‌ها، بلکه موضوع مورد بحث را کامل درک کرده باشد، تفسیر شود.

تمرین

۱. فرق بین داده و متغیر چیست؟
۲. داده‌های در سطح اسمی، کمّی هستند یا کیفی؟
۳. فرق بین آماره و پارامتر چیست؟
۴. در یک جامعهٔ آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟ اگر سه نمونه با اندازهٔ یکسان از یک جامعه داشته باشیم، آیا می‌توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد؟
۵. در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاخوری‌های گیاه‌خوار، سؤال شده است که برای کدام وعدهٔ غذایی (ناهار یا شام) غذا سفارش داده‌اند؟
الف) متغیر را مشخص کنید.
ب) این متغیر کمّی است یا کیفی؟
پ) جامعهٔ آماری در اینجا چیست؟

۶. متغیرها را در چهار مقیاس : اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی دسته‌بندی کنید.

الف) مدت‌زمان پاسخ‌گویی به سؤالات یک امتحان

ب) زمان اولین کلاس

پ) رشتهٔ تحصیلی

ت) مقیاس ارزیابی تحصیلی : ضعیف، معمولی و خوب

ث) نمرهٔ آخرین آزمون (از ۱۰۰ امتیاز)

ج) سن دانش‌آموز

لقمان و مرد پیاده

روزی لقمان در کنار چشمه‌ای نشسته بود. مردی که از آنجا می‌گذشت از لقمان پرسید : چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهم رسید.

لقمان گفت : راه برو. آن مرد پنداشت که لقمان نشنیده است. دوباره سؤال کرد : مگر نشنیدی؟ پرسیدم : چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهم رسید؟ لقمان گفت : راه برو. آن مرد پنداشت که لقمان دیوانه است. برای همین راه خود را گرفت و رفت. زمانی که چند قدمی راه رفت، لقمان به بانگ بلند گفت : ای مرد، یک ساعت دیگر بدان ده خواهی رسید. مرد گفت : چرا اول نگفتی؟ لقمان گفت : چون راه رفتن تو را ندیده بودم، نمی‌دانستم تند می‌روی یا کند. حالا که دیدم دانستم که تو یک ساعت دیگر به ده خواهی رسید. در این داستان ساده و قدیمی تمام اصول آماری رعایت شده است. چرا؟

نکتهٔ ظریف این داستان این است که لقمان فقط می‌گوید «راه برو» و توضیح دیگری نمی‌دهد. لقمان نمی‌گوید که می‌خواهم راه‌رفتن تو را ببینم تا از روی آن بگویم چه مدت طول می‌کشد تا به ده برسی، زیرا لقمان فکر می‌کند این اطلاع ممکن است در راه‌رفتن آن مرد اثر بگذارد و در نتیجه سرعتی که لقمان تخمین می‌زند، سرعت واقعی راه‌رفتن آن فرد نباشد و در نتیجه زمانی را که تخمین خواهد زد ، مدت زمان دقیقی نباشد.

درس ۲

معیارهای گرایش به مرکز

فعالیت

امسال خیرین مدرسه چقدر به مدرسه کمک می‌کنند؟ مدیر مدرسه بر اساس اطلاعات سال‌های گذشتهٔ خود می‌گوید: معمولاً خیرین، به‌طور متوسط، ۱۰ درصد از درآمد سالانهٔ خود را به این امر اختصاص می‌دهند. فرض کنید درآمد ماهانهٔ حضار در انجمن خیریهٔ این دبیرستان در سال جاری به ترتیب حروف الفبا به‌صورت زیر باشد:

	نجمیه	سبحان	رسول	حسنا	جوانه	احمد	ارمان
درآمد (میلیون ریال)	۴۰	۱۲	۲۸	۳۲	۳۰	۲۲	۲۵

پس برای پاسخ به سؤال طرح شده باید میانگین این اعداد را محاسبه کنید. میانگین همان چیزی است که به آن معدل هم می‌گویند. برای محاسبهٔ آن باید همهٔ درآمدها را با هم جمع و بر تعداد افراد حاضر تقسیم کنید. اگر همهٔ درآمدها را با هم جمع کنید (۱۸۹) و بر تعداد افراد (۷) تقسیم کنید، به عدد میانگین ۲۷ میلیون ریال در ماه می‌رسید. در نتیجه ۱۰ درصد از درآمد سالانه برابر با ۳۲/۴ است.

اگر n مشاهده به‌صورت $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ داشته باشیم، میانگین آنها را با نماد $\bar{x}$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

کار در کلاس

۱. میانگین داده‌های ۵۰، ۴۰، ۳۰، ۲۰، ۱۰ چقدر است؟
۲. اگر میانگین داده‌های ۴۰، x، ۱۰ برابر با ۳۰ شود مقدار x چقدر است؟
۳. میانگین اعداد ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ چقدر است؟
۴. میانگین اعداد ۵، ۸، ۶، ۴، ۲ چقدر است؟
۵. میانگین اعداد ۹، ۸، ۷، ۶، ۵ چقدر است؟
۶. میانگین اعداد ۹۰، ۸۰، ۷۰، ۶۰، ۵۰ چقدر است؟
۷. آیا می‌توانید سه قاعدهٔ کلی از تمرین‌های قبل دربارهٔ خواص میانگین ذکر کنید؟

حال اگر یک میلیاردر با درآمد ماهانه یک میلیارد ریال، به انجمن خیریهٔ دبیرستان ما بیاید، میانگین درآمد حضار چه تغییری می‌کند؟ (بیشتر مردم به او ثروتمند می‌گویند. آمارشناسان او را دورافتاده می‌نامند.) درآمد او میانگین را تا حدود ۱۴۸ میلیون ریال در ماه بالا می‌آورد (دقیقاً ۱۴۸/۶۲۵) و بر اساس شیوهٔ تخمین گذشته، خیّرین معادل ۱۷۸ میلیون ریال (دقیقاً ۱۷۸/۳۵) را به دبیرستان کمک خواهند کرد، که غیرواقعی به نظر می‌رسد یا امکان محقق شدن آن ضعیف است.

دادهٔ دورافتاده: مقداری متفاوت با سایر مقادیر داده‌هاست. معمولاً مقدار آن بسیار بزرگ‌تر یا بسیار کوچک‌تر از بقیهٔ داده‌هاست.

میانه

در مثال خیریه، دادهٔ دورافتاده باعث اشتباه ما در تخمین متوسط داده‌ها شد. میانگین، مرسوم‌ترین معیار گرایش به مرکز است که گاهی ممکن است ما را به اشتباه بیندازد، ولی می‌توان از معیار دیگری نیز برای بیان متوسط درآمد استفاده کرد. برای این منظور می‌توان از میانه استفاده کرد که دادهٔ وسطی داده‌های مرتب شده است.

پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابراست، **میانه** است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر با میانگین دو دادهٔ وسطی مرتب‌شده است.

برای محاسبهٔ میانهٔ داده‌ها، قبل از ورود میلیاردر، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. وسط این هفت‌عدد، یعنی چهارمین عدد میانه است. پس میانهٔ داده‌ها عدد ۲۸ است که با میانگین داده‌ها تفاوت زیادی ندارد.

ردیف	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
درآمد مرتب‌شده	۱۲	۲۲	۲۵	۲۸	۳۰	۳۲	۴۰

حال فرض کنید میلیاردر در خیریه حضور دارد. داده وسط برای ۸ عدد وجود ندارد یا به عبارتی ۸ عدد، عدد وسط ندارند. پس میانگین داده‌های چهارم و پنجم را می‌گیریم. جایگاه چهارم درآمد، ۲۸ و جایگاه پنجم آن ۳۰ و در نتیجه میانهٔ جدید درآمد، ۲۹ است.

بیشتر افراد معتقدند که عدد ۲۹ میلیون ریال، گویای مقدار صحیح متوسط درآمد افراد است و عدد

مد، مقداری از متغیر است که بیشترین فراوانی را دارد. مد یکی از معیارهای گرایش به مرکز است.
فروشندگان پوشاک از معیار مد بسیار استفاده می‌کنند. آنها با آمارگیری‌های خود درمی‌یابند که چه نوع پوشاکی مورد پسند مصرف‌کنندگان است؛ از همان پوشاک برای فروش سفارش می‌دهند.
در رأی‌گیری‌ها، اساس تصمیم‌گیری مد است؛ چون موردی که بیشترین فراوانی را داشته باشد، انتخاب می‌شود. در انتخاب رئیس‌جمهور، نامزدی انتخاب می‌شود که بیشترین فراوانی (رأی) را داشته باشد.
برای محاسبهٔ مد فقط کافی است فراوانی داده‌ها را با هم مقایسه کنیم. البته مد ممکن است منحصر به فرد نباشد.

۱۴۸میلیون ریال کاملاً بی‌ربط است. پس ما به یک نتیجه می‌رسیم : اگر در داده‌هایمان، دورافتاده وجود داشت ـ دقیقاً مانند زمانی که یک میلیاردر تصمیم به کار خبر می‌گیرد ـ باید از میانه استفاده کنیم.

تمرین

۱. میانهٔ داده‌های ۱۰,۱۴,۸۶,۲,۶۸,۹۹,۱چقدر است؟

۲. میانهٔ داده‌های ۱۱,۱۰,۱۴,۸۶,۲,۶۸,۹۹,۱چقدر است؟

نکتهٔ اصلی در اینجاست: اگر در آمار در جایی به یک نتیجهٔ شسته و رُفته برخوردید، خیلی احتیاط کنید. به دست آوردن «یک استنباط درست از داده‌ها تنها چیزی نیست که شما در یک بررسی آماری خواهان آن هستید خواستهٔ دیگر ما برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری است».

تصور کنید که به‌جای انجمن خیریه با یک بیمارستان سر و کار داریم و داده‌ها به‌جای مبالغ درآمد، هزینه‌های جراحی هستند. فرض کنید به‌جای میلیاردر، با یک بیمار روبه‌روییم که گرفتار بعضی از مشکلات بعد از عمل است و مجموع هزینه‌هایش بالغ بر ۲۵۰ میلیون ریال است.

بیمار	هزینه‌های جراحی (میلیون ریال)		هزینه‌های جراحی (مرتب‌شده)
الف	۲	۱	
ب	۵	۲	
ب	۴۵	۳	
ت	۷	۴	
ث	۳۵	۵	
ج	۳۰	۶	
چ	۵۰	۷	
ح	۲۵۰	۸	

میانگین هزینه‌های جراحی این بیمارستان برابر با ۵۳ میلیون ریال و میانهٔ آن برابر با ۳۲/۵ میلیون ریال است. اگر شما مدیر این بیمارستان بودید، کدام عدد برایتان از همه مهم‌تر بود؟ عدد ۳۲/۵ میلیون نشان‌دهندهٔ هزینه‌های معمول نگهداری یک بیمار است، اگر بخواهیم بودجهٔ سال بعد را با فرض این عدد بنویسیم، به احتمال زیاد با کسر بودجه مواجه می‌شویم. با قدری تفکر به میانگین و میانه، دلیل اینکه افراد از بیمهٔ تأمین اجتماعی استفاده می‌کنند، روشن می‌شود: (میانهٔ هزینه‌های سالیانهٔ درمان معمولاً بسیار کمتر از حق بیمهٔ پرداختی است، اما با نگاه به میانگین سالیانهٔ هزینه‌ها، حساب می‌کنم که معاملهٔ خوبی کرده‌ام) و من همیشه کمربند ایمنی را می‌بندم، اگرچه میانهٔ تعداد زخمی‌ها در هر سفر یا خودرو صفر باشد.

این نتیجه را نیز به یاد داشته باشید: گاهی هیچ آمار درست یا غلطی وجود ندارد، و همه‌چیز به این بستگی دارد که شما چرا می‌خواهید از آنها استفاده کنید.

کار در کلاس

با سه واژهٔ: دادهٔ دورافتاده، میانه، و میانگین، ۵ جملهٔ زیر را کامل کنید.

۱. آنچه اکثر مردم «حد وسط» می‌نامند، نزد آمارشناسان به ..... معروف است. برای محاسبهٔ ....., به داده‌های خود به‌عنوان فهرستی از اعداد نگاه کنید؛ همهٔ اعداد را با هم جمع کنید و بر تعدادشان تقسیم کنید.

۲. ..... در واقع نقطهٔ وسطی فهرست اعداد مرتب‌شده است. نیمی از اعداد مقادیر بزرگ‌تر از ..... و نیمی دیگر مقادیر کوچک‌تر از ..... هستند.

۳. زمانی با ..... مواجه هستیم که مشاهده‌ای داشته باشیم که از الگوی داده‌هایمان پیروی نکند.

۴. وقتی با ..... مواجه هستید، ..... معمولاً بازتاب بهتری از داده‌ها می‌دهد تا .....

۵. به‌طور کلی، برای برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری، ..... بهتر از ..... است.

شخصی دست راست خود را در یخچال و دست چپ خود را در فر کرده است. زمانی که از او دربارهٔ احساسش سؤال می‌شود پاسخ می‌دهد: «به‌طور متوسط خوب هستم». نتیجهٔ اخلاقی این لطیفه آن است که یک عدد به‌تنهایی، معمولاً مجموعه‌ای از داده‌ها را به‌خوبی توصیف نمی‌کند. بنابراین، اندیشهٔ خوبی است که علاوه بر معیار گرایش به مرکز، معیاری را نیز گزارش کنیم که نوسان و تغییرات داده‌ها را هم بیان کند.

میانگین موزون:
قطعاً شنیده‌اید که برخی از نمره‌های شما ضریب دارند. مثلاً اگر چهار بار از شما آزمون گرفته باشند، نمرهٔ آخرین آزمون را ممکن است در ۳ ضرب کنند؛ یعنی به آن ضریب ۳ بدهند. پس اگر نمره‌های شما به‌صورت زیر باشد:

آزمون	اول	دوم	سوم	چهارم
نمره	۱۶	۱۵	۱۸	۱۷

نمره‌ای که برای این درس در کارنامهٔ شما خواهد آمد میانگین ۶ عدد است؛ یعنی نمرهٔ درس مذکور عبارت است از:

$$\frac{17+17+18+15+16+16}{6}=16/66$$

میانگین نمره‌ها بدون احتساب ضریب، ۱۶/۵ می‌شود.

از میانگین موزون برای معدل دروسی که با واحدهای مختلف (تعداد ساعات متفاوت) در طول سال تحصیلی ارائه می‌شوند نیز استفاده می‌شود.

درس ۳

معیارهای پراکندگی

فعالیت

می‌خواهیم کلاس‌های دهم سه دبیرستان را بر اساس نتایج آزمون جامعی که هم‌زمان بین دانش‌آموزان ممتاز برگزارشده است، رتبه‌بندی کنیم. از هر دبیرستان ۱۰ نفر به‌تصادف انتخاب شده‌اند. نمره‌های آزمون جامع هر سه کلاس از ۲۰ نمره است.

داده‌های مربوط به سه کلاس دهم:

(الف) {۶۵,۷۵,۷۳,۵۰,۶۰,۶۴,۶۹,۶۲,۶۷,۸۵}

(ب) {۸۵,۷۹,۵۷,۳۹,۴۵,۷۱,۶۷,۸۷,۹۱,۴۹}

(پ) {۴۳,۵۱,۵۳,۱۱,۵۰,۴۸,۸۷,۶۹,۶۸,۹۱}

میانگین سه کلاس را محاسبه کنید. به نظر شما پراکندگی نمره‌ها در کدام کلاس بیشترین و در کدام کلاس کمترین است؟ برای پاسخ به این سؤال، داده‌ها را روی سه محور موازی نمایش دهید. کدام دبیرستان نتایج بهتری با اطلاعات داده‌شده کسب کرده است؟ چرا؟ مثلاً اگر والدین برای ثبت نام فرزند بازیگوش خود در سال آینده بخواهند بر اساس این نتایج، یکی از مدرسه‌ها را انتخاب کنند، مدرسه‌ای بهتر است که پراکندگی نمره‌ها در آن کمتر است. در مقابل، برای فرزندی که به قصد شرکت در المپیاد می‌خواهد مدرسه را انتخاب کند، مدرسه‌ای بهتر است که پراکندگی نمره‌ها در آن بیشتر باشد. چرا؟

یک معیار معمول برای سنجش میزان پراکندگی که نشان‌دهند؛ تغییرات داده‌های مورد مطالعه است، **انحراف معیار** است. انحراف‌معیار را با به‌کارگیری یک فرمول، از داده‌ها به دست می‌آوریم. (اختلاف هر عدد با میانگینِ داده‌ها را حساب کنید، به توان ۲ برسانید؛ میانگین اعداد حاصل را به دست آورید، و سپس جذر بگیرید.) توان دوم انحراف معیار را **واریانس** می‌نامند. داده‌ها در شکل زیر رسم شده‌اند. همچنین انحراف معیار نمره‌های سه کلاس، محاسبه و در شکل نشان داده شده است.

اگر n مشاهده را به‌صورت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ داشته باشیم، انحراف معیار آنها را با نماد σ (سیگما) نشان می‌دهند، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

کار در کلاس

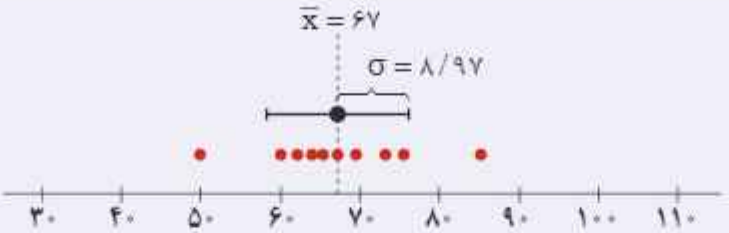
۱. اگر داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف معیارشان برابر با صفر خواهد شد. چرا؟

۲. انحراف معیار نمره‌های آزمون جامع سه کلاس را می‌توانید با تکمیل جدول زیر محاسبه کنید.

انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲			انحراف مشاهدات از میانگین			مشاهدات		

مشـاهده می‌شـود که انحراف معیار، نه‌تنها نظر شما در خصوص کلاس با بیشترین پراکندگی نمره‌ها را تأیید می‌کند، بلکه به شما امکان مقایسهٔ کمّی آنها را نیز می‌دهد. حال می‌توانید درستی پاسخ‌های خود را بررسی کنید.

کلاس الف)

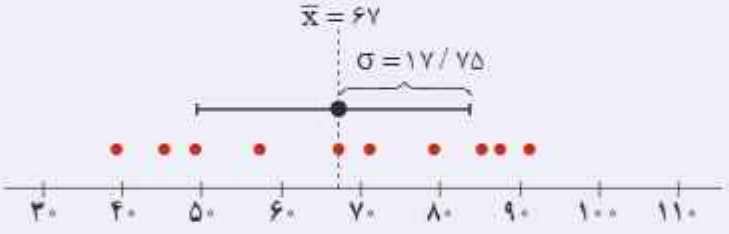


داده‌ها: $\{۶۵,۷۵,۷۳,۵۰,۶۰,۶۴,۶۹,۶۲,۶۷,۸۵\}$

میانگین: $\bar{x} = ۶۷$

انحراف معیار: $\sigma = ۸/۹۷$

کلاس ب)

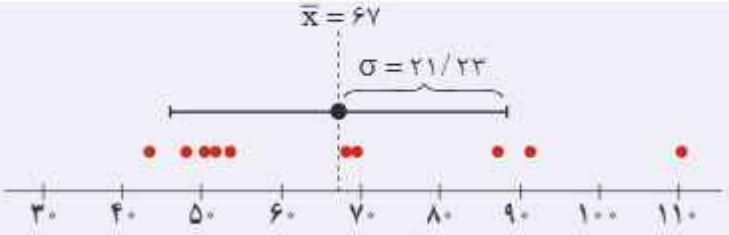


داده‌ها: $\{۸۵,۷۹,۵۷,۳۹,۴۵,۷۱,۶۷,۸۷,۹۱,۴۹\}$

میانگین: $\bar{x} = ۶۷$

انحراف معیار: $\sigma = ۱۷/۷۵$

کلاس پ)



داده‌ها: $\{۴۳,۵۱,۵۳,۱۱۰,۵۰,۴۸,۸۷,۶۹,۶۸,۹۱\}$

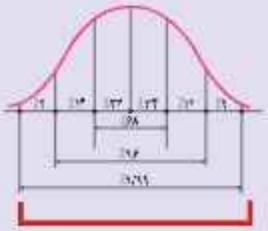
میانگین: $\bar{x} = ۶۷$

انحراف معیار: $\sigma = ۲۱/۲۳$

پراکندگی در خم بهنجار (منحنی نرمال)

اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، بافت‌نگاشت (هیستوگرام) آنها را می‌توان به‌صورت یک خم تصور کرد. اگر این خم به‌صورت یک «زنگ» باشد، به آن خم بهنجار گفته می‌شود. خداوند بسیاری از پدیده‌ها را بهنجار آفریده است. مثلاً طول قد یا وزن دانش‌آموزان بهنجارند؛ یعنی بافت‌نگاشتی زنگی شکل دارند. خواص این خم، کمک زیادی برای تصمیم‌گیری بر اساس داده‌ها یا کسب اطلاعات از آنها می‌کند. به یاد دارید که گفته شد اگر σ انحراف معیار داده‌ها باشد، چند درصد از داده‌ها به‌طور تقریبی بین میانگین که در واقع گرانیگاه یا مرکز ثقل بافت‌نگاشت است و چه ضرایبی از انحراف معیار قراردارد؟

این اطلاعات را به‌طور مختصر در شکل زیر ملاحظه می‌کنید (مقادیر روی نمودار تقریبی هستند):



فعالیت

حتماً بر روی قوطی‌ها یـا پاکت‌های مواد غذایی یا بهداشتی اعدادی به‌صورت زیر مشاهده کرده‌اید. به‌نظر شما هریک از این اعداد چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۲۵۰ ± ۱۰ گرم

عدد ۲۵۰ وزن خالص مادهٔ غذایی است که قرار است به دست مصرف‌کننده برسد؛ ولی معمولاً این‌چنین نیست. کمی خطا اجتناب‌ناپذیر است. این خطا چقدر است و آن را چگونه محاسبه کنیم؟ اگر وزن و انحراف معیار تعداد زیادی از محتوای پاکت‌ها یا قوطی‌های یک تولیدی را محاسبه کنیم، دو برابر آن عدد ۱۰ است؛ یعنی عدد ۱۰ دو برابر انحراف معیار مواد غذایی در بسته‌بندی‌های مختلف است. به عبارت دقیق‌تر اگر ما ۱۰۰ قوطی حاوی این مادهٔ غذایی را وزن کنیم، انتظار داریم حداقل ۹۶ تا از آنها وزنی بین ۲۴۰ و ۲۶۰ گرم داشته باشند. درج چنین اعدادی بر روی کالاها از الزامات استاندارد هر کشوری است. چگونه به عدد ۹۶ رسیده‌اند؟

برای پی بردن به میزان تغییراتی که داریم، معمولاً با محاسبهٔ مقدار انحراف از میانگین، اطلاعات دقیق‌تری در خصوص میانگین و انحراف معیار به‌دست خواهیم آورد. برای این منظور از یک قانون مشهور در آمار استفاده می‌کنیم: تقریباً ۹۶درصد از داده‌ها در فاصلهٔ «دو انحراف معیار از میانگین» هستند. این جمله یعنی اگر فاصله‌ای تعریف کنیم که ابتدای آن $\bar{x} - ۲\sigma$ و انتهای آن $\bar{x} + ۲\sigma$ باشد، تقریباً ۹۶درصد داده‌ها در این فاصله قرار دارند. این مانند آن است که بگوییم ۴درصد از نمره‌ها بیش از دو برابر انحراف معیار از میانگین فاصله دارند. البته مشابه همین قانون در شکل‌های قبل برای یک برابر انحراف معیار نمایش داده شده است. در این حالت، قانون قبل به «تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات در فاصلهٔ یک انحراف معیار از میانگین هستند»، تغییر می‌کند.

دو برابر انحراف از میانگین را روی همان شکل رسم کنید.

کار در کلاس

جدول زیر را تکمیل کنید.

تقریباً ۹۹/۹ درصد از مشاهدات در فاصلهٔ سه برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.	$-۳\sigma < \bar{x} < ۳\sigma$
تقریباً ..... از مشاهدات در فاصلهٔ ..... انحراف معیار از میانگین قرار دارند.	$-۲\sigma < \bar{x} < ۲\sigma$
تقریباً ..... از مشاهدات در فاصلهٔ یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.	.....

فعالیت

می‌خواهیم با همان مثال خیریهٔ درس قبل، بحث را ادامه دهیم. اگر انحراف معیار مجموعه‌داده‌ها کوچک باشد، بدین معناست که درآمد همهٔ افراد به هم نزدیک است. اگر انحراف معیار بزرگ باشد، بدین معناست که درآمد افراد آن انجمن، بسیار متفاوت است. انحراف معیار درآمد اعضا به صورت زیر محاسبه می‌شود.

به کمک جدول زیر، این کار را انجام دهید.

انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲		انحراف مشاهدات از میانگین		مشاهدات	
بعد از ورود میلیاردر	قبل از ورود میلیاردر	بعد از ورود میلیاردر	قبل از ورود میلیاردر	بعد از ورود میلیاردر	قبل از ورود میلیاردر
				۴۰	۴۰
				۱۲	۱۲
				۲۸	۲۸
				۳۲	۳۲
				۳۰	۳۰
				۲۲	۲۲
				۲۵	۲۵
				۱۰۰۰	

شعارهای برتر سال جهانی آمار

آمارهای دقیق، پشتوانهٔ توسعهٔ پایدار

***

آمار، ابزاری علمی در توسعهٔ مبتنی بر دانایی

زمانی که میلیاردر وارد انجمن خیریه می‌شود، انحراف معیار داده‌ها برابر است با .....

این دو مقدار با هم اختلاف زیادی دارند. چرا و چه باید کرد؟ زمانی را به خاطر بیاورید که معیار گرایش به مرکز را برای این داده‌ها محاسبه کردیم. برای رفع آن مشکل به‌جای میانگین، میانه را به کار بردیم. مشابه همان کار را می‌توانیم انجام دهیم. معیار پراکندگی‌ای که تعریف می‌شود، انحراف معیار نیست. ما آن را دامنهٔ میان‌چارکی می‌نامیم و با IQR نشان می‌دهیم. «میانه» جایی در وسط داده‌هاست؛ به‌طور مشابه، چارک‌ها هم یک‌چهارم و یک‌دوم و سه‌چهارم مشاهدات هستند. به عبارت ساده‌تر اگر برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه حساب کنیم، همان چارک اول است و به همین صورت میانهٔ داده‌های بعد از میانه، چارک سوم خواهد بود. چارک دوم هم همان میانه است. برای سادگی از نمادهای Q_1 و Q_2 و Q_3 به‌ترتیب برای چارک اول، میانه (چارک دوم)، و چارک سوم استفاده می‌شود.

جدول زیر را برای مثال خیّرین مدرسه تکمیل کنید.

	Q_1 چارک اول	Q_2 میانه	Q_3 چارک سوم	$IQR=Q_3-Q_1$ دامنه میان چارکی	σ انحراف‌معیار
درآمد ماهانهٔ اعضای انجمن					
درآمد بعداز ورود میلیاردر					

این اعداد، امکان مشاهدهٔ چند چیز را به شما می‌دهند: میلیاردر مسبب درهم‌ریختگی میانگین درآمد و انحراف معیار بوده است؛ اما میانه و دامنهٔ میان‌چارکی همچنان ثابت ماندند. این یکی از دلایلی است که ما می‌گوییم اگر دادهٔ دورافتاده داشته باشیم، بهتر است از میانه (و در نتیجه دامنهٔ میان‌چارکی) به‌جای میانگین استفاده کنید. در این صورت، نتیجهٔ بهتری از داده‌ها به دست می‌آورید. همچنین زمانی که تعداد داده‌ها زیاد باشد، می‌توانید از تفاوت معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی نتیجه بگیرید که دادهٔ دورافتاده وجود داشته است.

دلیل دیگر استفاده از میانه و دامنهٔ میان‌چارکی، تفسیر سادهٔ آنها در مقابل تفسیر میانگین و انحراف معیار است. اگر نتایج مطالعات مربوط به سرطان را ملاحظه کنیم، اولین چیزی که در گزارش‌ها مشاهده می‌کنیم، مشخصات عمومی بیماران مورد مطالعه است: آنها چند سال سن دارند؟ نسبت مردان به زنان چقدر است؟ چند نفر بیماریشان زود تشخیص داده شده و در مراحل ابتدایی است و چند نفر بیماریشان عود کرده است؟ اگر در گزارش، میانگین و انحراف معیار را ذکر کنیم، هر خوانندهای می‌تواند از روی اطلاعات داده‌شده، با توجه به دو قانون ذکر شده، نحوهٔ توزیع سنین بیماران را به دست آورد. اما نکته در اینجاست که آنها این کار را نخواهند کرد. به ندرت می‌توانید یک پزشک متخصص سرطان بسیار پرمشغله را در حال فکر کردن به این مسئله ببینید که، «خوب ...میانگین ۶۴/۳ و انحراف معیار ۹/۸ است؛ ۶۸ درصد از بیماران در فاصلهٔ یک برابر انحراف معیار از میانگین هستند؛ این یعنی، $۶۴/۳ \pm ۹/۸$، که می‌شود...، یک لحظه صبر کنید...، ماشین حسابم کجاست؟» شما فقط می‌توانید با نگاهی سریع به میانه و دامنهٔ میان‌چارکی، تصور خوبی نسبت به توزیع

داده‌های پیش رویتان به دست آورید. به عبارت دیگر، میانه و دامنهٔ میان‌چارکی در توصیف مجموعه داده‌ها بسیار مفیدند و این دقیقاً همان کاری است که ما از آنها انتظار داریم انجام دهند:

همه آماره‌هایی که در اینجا ذکر شد (میانگین‌ها، میانه‌ها، انحراف‌های معیار، دامنه‌های میان‌چارکی) تحت عنوان آمار توصیفی شناخته می‌شوند.

کار در کلاس

جمله‌های زیر را کامل کنید:

۱. میانگین‌ها و میانه‌ها برای توصیف مجموعه‌داده‌ها مفیدند. ..... و ..... انواعی از معیارهای گرایش به مرکز هستند.

۲. شما معمولاً نه‌تنها معدل یک مجموعه را می‌خواهید، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز دارید که آن معیار، ..... است.

۳. معیار پراکندگی که معمولاً با میانگین بیان می‌شود، ..... است.

۴. معیار پراکندگی که معمولاً با میانه بیان می‌شود، ..... نام دارد.

۵. ..... و ..... اطلاعات سریعی دربارهٔ داده‌ها بدون نیاز به هرگونه محاسبه می‌دهند.

۶. آماره‌ای که برای توصیف یک مجموعه داده، میانگین‌ها و میانه‌ها، انحرافات معیار و دامنه‌های میان چارکی به کار می‌رود، ..... نام دارد.

۷. ..... درصد داده‌ها قبل از میانه و ..... درصد داده‌ها بعد از میانه قرار دارند.

۸. ۷۵ درصد داده‌ها قبل از ..... یا بعد از ..... قرار دارند.

۹. ۲۵ درصد داده‌ها قبل از ..... یا بعد از ..... قرار دارند.

۱۰. ۵۰ درصد داده‌ها بین ..... و ..... قرار دارند.

۱۱. تقریباً ۹۶ درصد از مشاهدات در فاصلهٔ ..... از میانگین هستند.

۱۲. تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات در فاصلهٔ ..... از میانگین هستند.

شعارهای برتر
سال جهانی آمار

آمار دقیق،
برنامه‌ریزی بهتر،
آیندهٔ روشن

***

آمار سیمای واقعیت،
ابزار مدیریت

تمرین

۱. یک نمونهٔ ۲ تایی از اعداد ۱ تا ۶ انتخاب کنید. اگر بخواهید این نمونه حتماً تصادفی باشد، چه‌راهی را پیشنهاد می‌کنید. اگر بخواهید واحدهای انتخابی این نمونهٔ تصادفی، تکراری نباشند، چگونه این کار را انجام می‌دهید؟

۲. سؤال ۱ را برای اعداد ۱ تا ۳۶ تکرار کنید. (راهنمایی: می‌توانید از پرتاب دو تاس به‌عنوان روشی برای انتخاب اعداد ۱ تا ۳۶ استفاده کنید.)

۳. مجموعهٔ افراد فامیل درجهٔ اول و درجهٔ دوم خود را بنویسید و آنها را شماره‌گذاری کنید. سپس یک نمونهٔ ۴ تایی از این جامعه انتخاب کنید. موضوع‌های زیر را برای نظرخواهی از آنان در نظر بگیرید. دربارهٔ بهترین روش گردآوری داده‌ها برای این فرضیه‌ها تصمیم بگیرید:

الف) اکثر مردم فکر می‌کنند «حداکثر سرعت در بزرگراه‌ها باید تعیین شود».

ب) آبی، رنگ مورد علاقهٔ بیشتر مردم برای ماشین است.

پ) گوش دادن به موسیقی کلاسیک در زمان مطالعه، به یادگیری کمک می‌کند.

ت) بیشتر تصادفات اتومبیل‌ها را رانندگان با سن کمتر از ۲۵ سال مرتکب می‌شوند.

ث) رژیم گرفتن، باعث کاهش هوش می‌شود.

۴. دو موضوع برای هر یک از روش‌های گردآوری داده‌ها بیان کنید.

الف) از طریق مصاحبه **ب)** از طریق مشاهده **پ)** از طریق دادگان **ت)** از طریق پرسش‌نامه

۵. کدام‌یک از نمونه‌گیری‌های زیر، یک نمونه‌گیری تصادفی است. در هر یک واحدهای آماری، جامعه و نمونه را مشخص کنید.

الف) با همهٔ مأموران یک باشگاه پلیس برای آگاهی از نظرشان راجع به تخلفات مصاحبه شد.

ب) با بچه‌هایی که وارد یک پارک بازی می‌شدند، پنج در میان مصاحبه شد تا وسیلهٔ بازی مورد علاقهٔ کودکان بررسی شود.

پ) برای بررسی pH شامپوهای تولیدی یک کارخانه، شامپوها را صد در میان مورد آزمایش قرار دادیم.

۶. برای تحقیقات و بررسی‌های زیر، جامعه را مشخص و روش نمونه‌گیری پیشنهاد کنید.

الف) پیدا کردن درصد بیکاران استان مازندران **ب)** مردان کدام شامپو را بیشتر ترجیح می‌دهند؟

۷. می‌خواهیم مدت زمانی را که دانش‌آموزان کلاس شما در طول یک هفته صرف مطالعهٔ کتاب‌های غیردرسی می‌کنند، آمارگیری کنیم.

الف) برای این آمارگیری، جامعه را مشخص کنید.

ب) یک روش نمونه گیری برای انتخاب نمونه معرفی کنید.
پ) از چه روشی برای گردآوری اطلاعات استفاده می کنید؟
ت) اندازهٔ (تعداد واحدهای) این جامعه چقدر است؟
ث) اندازهٔ نمونه مورد بررسی چقدر است؟ آیا این تعداد برای بررسی مورد نظر مناسب است؟ در صورت مناسب نبودن، روش نمونه‌گیری و نمونهٔ خود را اصلاح کنید.
ج) متغیر مورد مطالعه در این مسئله چیست؟ توضیح دهید.
ج) متغیر مورد مطالعه از چه نوعی است؟

۸. نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص و بهترین مقیاس اندازه‌گیری آنها را ذکر کنید.
الف) رنگ اتومبیل‌های موجود در یک نمایشگاه اتومبیل
ب) درجهٔ حرارت کلاس شما در روزهای سال
پ) گنجایش آب یک باری مخزنی (تانکر)
ت) تعداد شکایات رسیده به یک پاسگاه پلیس
ث) درآمد دانشجویان شاغل به کار
ج) وضعیت تأهل کارمندان یک شرکت
ج) سن دانشجویان شرکت کننده در یک دورهٔ هنری

۹. میزان پرداخت حقوق در یک شرکت خصوصی در جدول زیر آمده است :

سمت	مدیر شرکت	معاون	حسابدار	بازاریاب	۲ نفر فروشنده	منشی	مستخدم
حقوق میلیون ریال	۵۰۰	۳۰۰	۱۵۰	۱۰۰	۱۰۰	۶۰	۴۰

مدیر شرکت در آگهی دعوت به همکاری در روزنامه اعلام می‌دارد که میانگین پرداخت حقوق در این شرکت بیشتر از ..... ریال است. آیا این رقم می‌تواند دلیلی برای پرداخت حقوق زیاد در این شرکت باشد؟ چرا؟ کدام‌یک از معیارهای گرایش به مرکز برای نشان دادن وضع پرداختی کارکنان این شرکت مناسب‌تر است؟

۱۰. نمره‌های درس فیزیک دانش‌آموزی در طول سال برابر است با:

۱۹	۱۸	۷	۱۸	۱۹	۱۷

الف) میانه و میانگین را برای نمره‌های این دانش آموز حساب کنید.
ب) کدام‌یک از شاخص‌های فوق، نشان‌دهندهٔ وضع این دانش آموز در درس فیزیک است؟
پ) اگر معلم درس فیزیک این دانش آموز، برای جبران نمرهٔ ۷، امکان امتحان مجدد را به او بدهد، برای اینکه میانگین وی در این درس، بیشتر از ۱۸ شود، او چه نمره‌ای در این امتحان باید کسب کند؟

۱۱. دو دستهٔ دادهٔ زیر، قیمت کالایی را در دو بازار جداگانه برحسب هزار ریال نشان می‌دهد.

بازار الف	۱۰	۱۱	۱۰	۹	۱۲	۱۱	۱۰	۱۲	۹	۱۳	۸
بازار ب	۱۰	۹	۱۱	۱۰	۱۰	۱۱	۹	۱۰	۸	۱۳	۱۰

الف) در کدام دسته پراکندگی بیشتر است؟

ب) دامنهٔ تغییرات را محاسبه کنید.

پ) آیا دامنهٔ تغییرات با پراکندگی مشاهده‌شده در قسمت «الف» همخوانی دارد؟

ت) ترجیح می‌دهید از کدام بازار خرید کنید؟ چرا؟

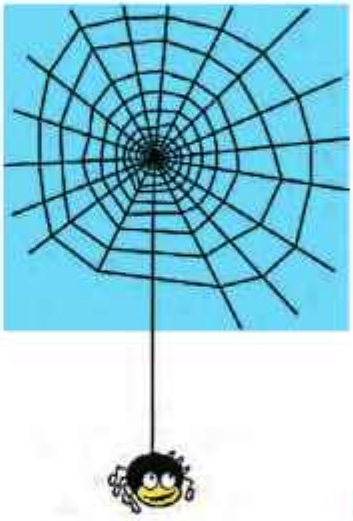
ث) اگر داده‌ها را در اختیار نداشته باشید، آیا فقط با داشتن دامنهٔ تغییرات می‌توانید تصمیم‌گیری کنید؟

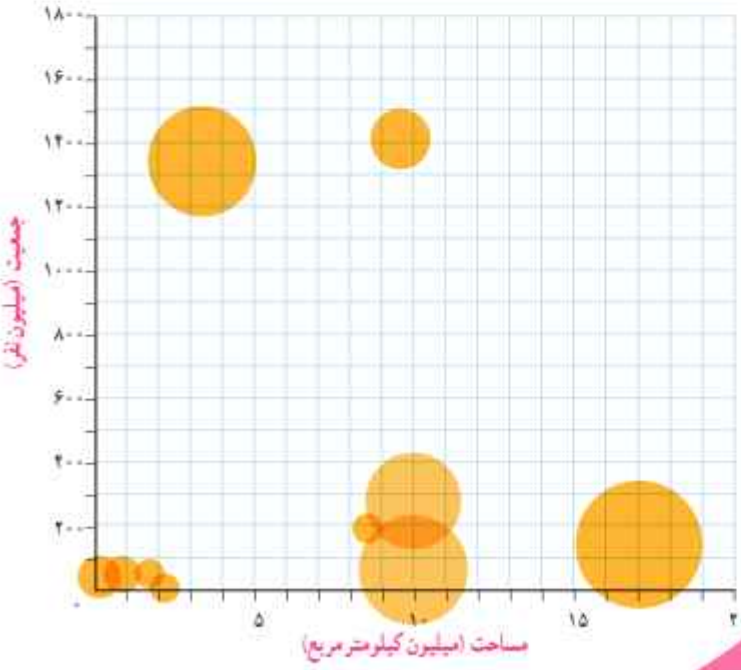
فصل چهارم

نمایش داده‌ها

درس ۱ نمودارهای یک‌متغیره

درس ۲ نمودارهای چندمتغیره



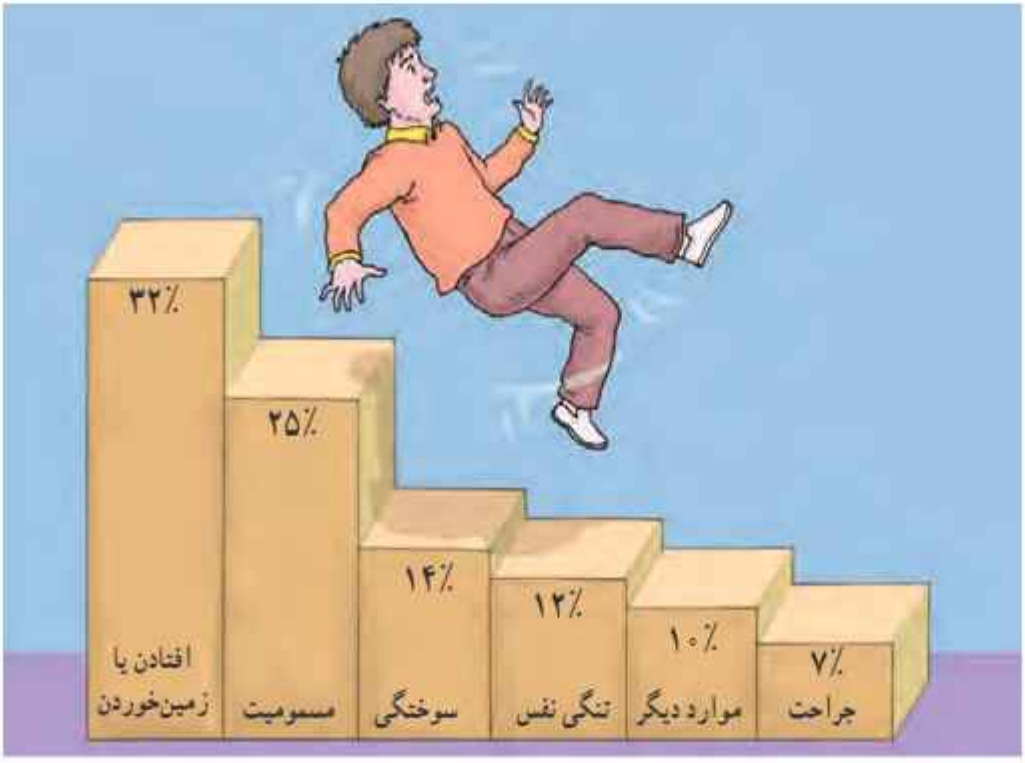


درس ۱

نمودارهای یک‌متغیره

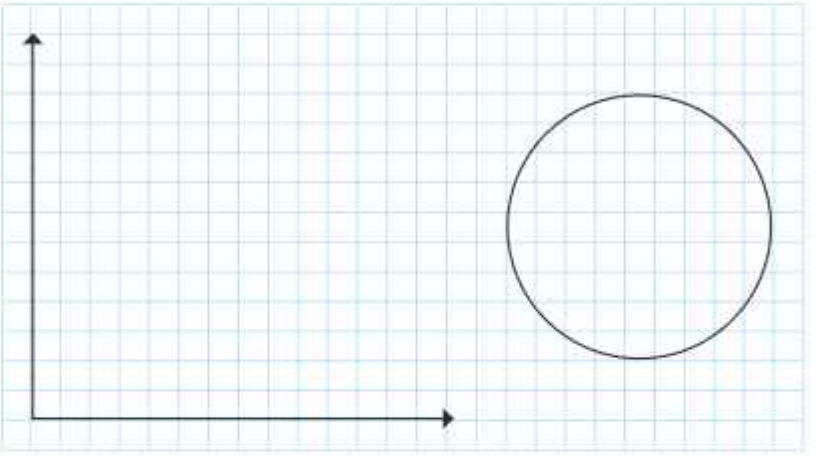
فعالیت

در کلاس درس قرار شد هر دانش‌آموز با توجه به داده‌های موجود در رسانه‌ها، دربارهٔ یک موضوع اجتماعی یا فرهنگی گزارشی در قالب یک شکل ارائه کند. مثلاً حسن در مورد موضوع علل آسیب‌دیدگی ۲۰۰ نفر در منازل اطلاعاتی کسب کرده بود. او گزارش خود را در یک شکل خلاصه کرده است. او با اطلاعاتی که در اختیار داشته است، ابتکار جالبی به خرج داده و نمودار زیر را رسم کرده است. از این نمودار چه اطلاعاتی می‌توان کسب کرد؟ به‌عنوان مثال، بیشترین آسیب‌دیدگی در منازل بر اثر افتادن یا زمین خوردن است.



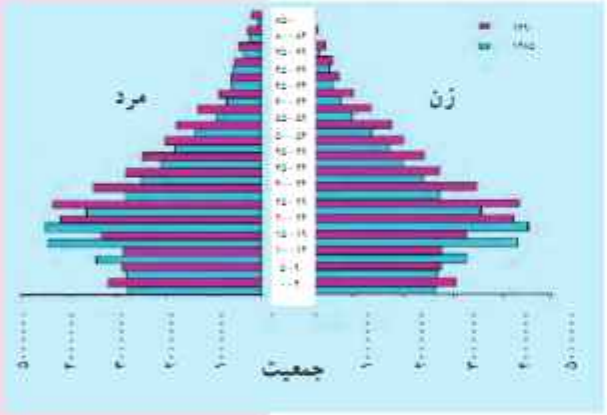
معلم از موضوع انتخابی و نمایش ترتیبی مکعب‌ها بر حسب طول آنها رضایت کامل داشت؛ ولی از دانش‌آموزان درخواست کرد که اگر می‌توانند پیشنهادی برای بهتر شدن آن ارائه کنند. آیا شما قبل از دیدن نظرها می‌توانید چند پیشنهاد برای بهبود نمودار ارائه کنید؟

نمودار میله‌ایِ انواع آسیب‌دیدگی را برحسب تعداد رسم کنید. مراحل رسم نمودار دایره‌ای را به یاد بیاورید و آن را در چند گام خلاصه کنید. نمودار دایره‌ایِ درصد آسیب‌دیدگی‌ها را نیز رسم کنید.



جمع‌بندی پیشنهادها براساس آموخته‌های ما در سال‌های گذشته به‌صورت زیر است:

- رسم مکعب مستطیل به‌جای مستطیل (نمودار سه بعدی به جای دو بعدی) خوب نیست، چون ممکن است اطلاعات دقیق را به بیننده انتقال ندهد.
- برای متغیرهای اسمی، نمودار میله‌ای بهتر از بافت‌نگاشت (هیستوگرام) است.
- زمانی که درصد را گزارش می‌کنیم، بهتر است از نمودار دایره‌ای استفاده کنیم تا بهتر بتوانیم مقایسه انجام دهیم؛ البته به شرطی که بیشتر از ۶ مقدار نداشته باشیم.



مقایسهٔ هرم سنی جمعیت ایران در سال‌های ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰

کار در کلاس

در کلاس درس خود، متوسط مصرف روزانهٔ انواع میوه‌ها یا سبزی‌ها را برای یکی از هم‌کلاسی‌های خود، به یکی از روش‌های فصل قبل جمع‌آوری کنید و آنها را با یک نمودار مناسب نمایش دهید. مثلاً اگر در روز شنبه ۳، یکشنبه ۶، دوشنبه ۵، سه‌شنبه ۴، چهارشنبه ۳، و پنج‌شنبه ۷ و جمعه ۸ نوع میوه یا سبزی خورده باشد، میانگین آنها برابر با ۵/۱۴ است که آن را ۵ در نظر می‌گیریم.

نمایش داده‌ها

نمایش داده‌ها روشی برای کمک به استخراج اطلاعات از داده‌ها با حس بینایی است.

فعالیت

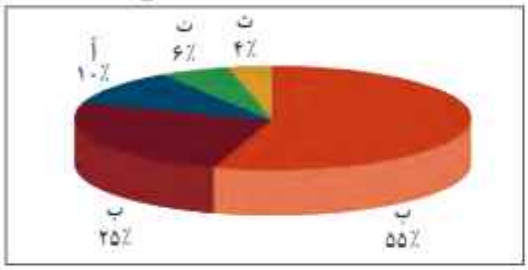
از نمودار دایره‌ای مقابل، برای نشان دادن وضعیت استفاده از اینترنت در پنج کشور استفاده شده است. کدام کشور دسترسی بیشتری به اینترنت دارد؟ آیا اطلاعات این نمودار برای پاسخ به این سؤال کافی است؟ چه اطلاعاتی از این نمودار کسب می‌کنید؟

اگر عامل جمعیت را در نظر بگیریم، واقعیت میزان توسعهٔ اینترنت و میزان استفاده از آن در این کشورها را می‌توان به‌صورت روبه‌رو نشان داد.

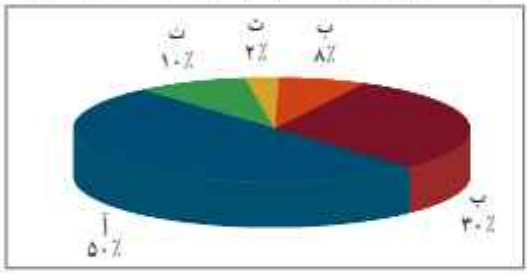
آیا برداشت شما از نمودار قبل تغییر کرد؟

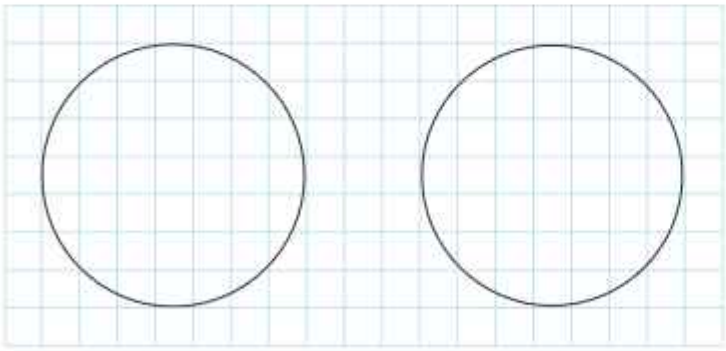
به نظر شما رسم نمودار دایره‌ای به‌صورت دوبعدی که در سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید، بهتر است یا سه بعدی مانند دو نمودار قبلی؟

درصد تعداد کاربران اینترنت در پنج کشور



درصد کاربران اینترنت نسبت به کل جمعیت در پنج کشور





خواندنی

می‌گویند ارزش یک تصویر به اندازهٔ هزار کلمه است. انتقال اطلاعات از طریق نمایش داده‌ها بسیار جذاب‌تر و سریع‌تر از ارائهٔ همان اطلاعات در جدول‌هاست. نمودارها باید به‌گونه‌ای رسم شوند که از آنها سوء برداشت نشود و بی‌طرفی را حفظ کنند.

کار در کلاس

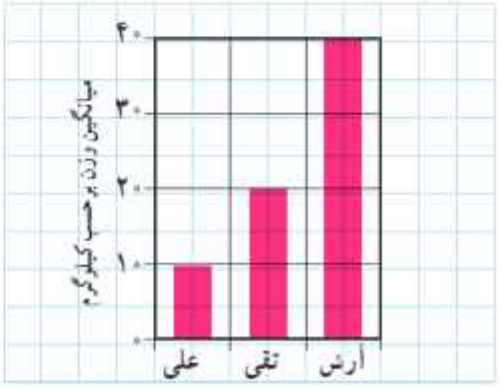
بازی با نمودارها

به‌کارگیری غلط نمودارها، راه ساده‌ای برای گمراه کردن افراد است. افراد مایل‌اند به نمودارها به‌عنوان روشی سریع برای ارزیابیِ مجموعه‌ای از اعداد بنگرند. اما مراقب باشید که فریب نخورید.

۱. بیایید از کدوتنبل‌های باغ‌های آرش، تقی و علی استفاده کنیم. اولین نمودار به‌صورت زیر است:

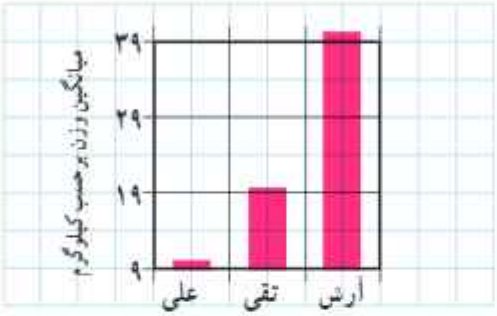
این نمودار چه چیزی را نمایش می‌دهد؟ وزن، حجم، پهنا یا ارتفاع کدو تنبل‌ها را؟

۲. نمودار زیر چه تفاوتی با نمودار بالا دارد؟



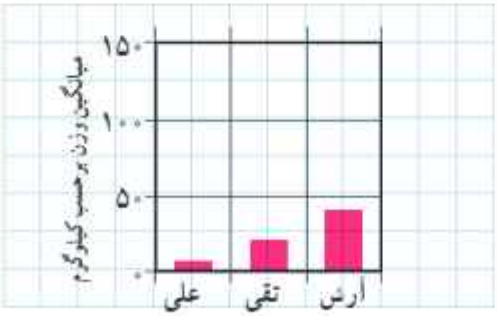
این نمودار به چه اطلاعات بیشتری اشاره می‌کند؟

۳. اگر نقطهٔ شروع محور عرض‌ها را از صفر به عدد ۹ تغییر دهیم، چه تغییری در نتیجه حاصل می‌شود؟

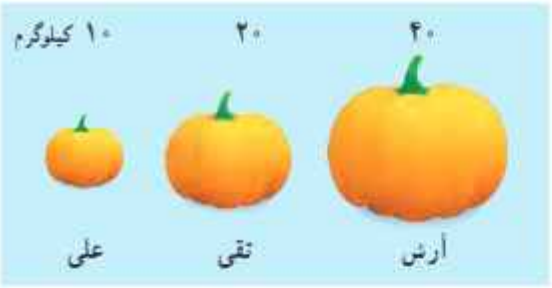


در واقع اعداد همان اعداد قبلی‌اند، اما محور عرض‌ها تغییر کرده است. اکنون این‌طور به نظر می‌رسد که کدوتنبل‌های .....

۴. اگر کسی بخواهد دیگران را متقاعد کند که همهٔ کدوتنبل‌ها حدوداً به یک اندازه‌اند، چه کاری می‌تواند بکند؟ به این نمودار نگاه کنید:



اعداد تغییری نکرده‌اند؛ اما محور عمودی دوباره تغییر کرده است. چه تغییری کرده است؟



گاهی برای نمایش داده‌ها از یک تصویر استفاده می‌شود، مانند شکل روبه‌رو.

این تصویر، داده‌ها را از شکل طبیعی خارج می‌کند. برای نمایش تفاوت میانگین وزن‌ها، این تصویر ارتفاع هر کدوتنبل را، برای نشان دادن وزنش، تغییر می‌دهد. ارتفاع کدوتنبل تقی (با وزن ۲۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدوتنبل علی (۱۰ کیلوگرم) است، ارتفاع کدوتنبل آرش (۴۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدوتنبل تقی و چهار برابر ارتفاع کدوتنبل علی است. آیا این شکل، اطلاعات مورد نظر را به‌درستی به بیننده منتقل می‌کند؟ (راهنمایی: فرمول‌های محاسبه و مساحت را به‌یاد آورید: مساحت مستطیل = طول × عرض. مساحت دایره = πr^2)

شما این شکل را چگونه رسم می‌کنید تا اطلاعات موجود را بهتر نمایش دهد؟

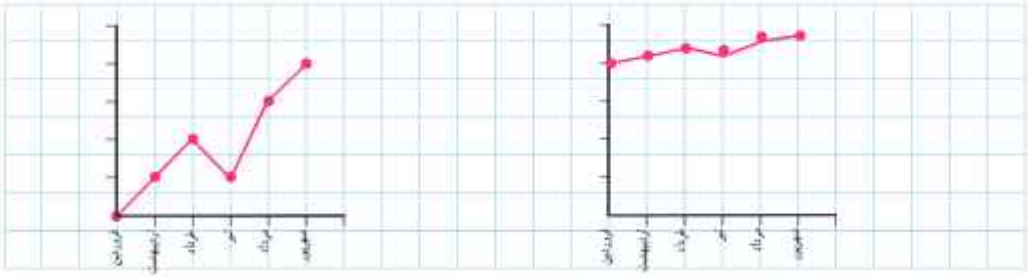
به نظر شما آیا **رنگ** در انتقال نظرتان به بیننده تأثیر دارد؟

تمرین

۱. سود خالص یک شرکت خدماتی در شش ماه نخست سال بر حسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

فروردین	اردیبهشت	خرداد	تیر	مرداد	شهریور
۲/۰	۲/۱	۲/۲	۲/۱	۲/۳	۲/۴

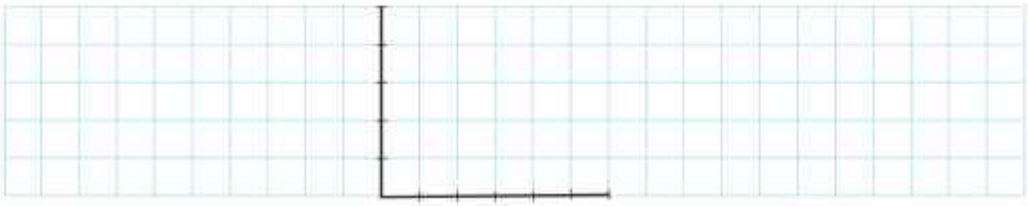
خریدار و فروشندهٔ سهام این شرکت، نمودارهای زیر را رسم کرده‌اند. اعداد روی محورها را مشخص کنید:



نمودار از دید خریدار

نمودار از دید فروشنده

به نظر شما کدام‌یک منطقی‌تر است؟ آیا می‌توانید نموداری بهتر از این دو نمودار رسم کنید؟



۲. اگر درصد یا فراوانی متغیرهایی که نمودارهای آنها را رسم می‌کنیم، نزدیک به هم باشند، آیا نمودار میله‌ای برای مقایسه مناسب‌تر است یا نمودار دایره‌ای؟

۳. رسم نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای داده‌های کمّی مناسب‌تر است یا برای داده‌های کیفی؟

فعالیت

مربی گروه (تیم) بسکتبال شهر می‌خواهد بر اساس نتایج بازی‌های قبلی دو بازیکن، نسبت به حضور یکی از آنها در بازی بعدی تصمیم بگیرد. امتیازهای کسب‌شده توسط این دو بازیکن به صورت زیر است :

۱۱ بازی بازیکن الف:

امتیاز کسب‌شده	۳	۶	۷	۱۰	۱۱	۱۳	۳۰
تعداد بازی	۲	۱	۲	۳	۱	۱	۱

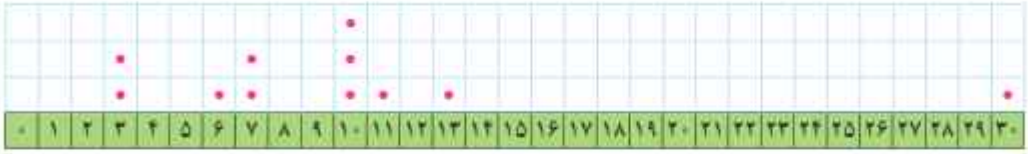
۱۰ بازی بازیکن ب:

امتیاز کسب‌شده	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد بازی	۱	۱	۲	۲	۲	۱	۱

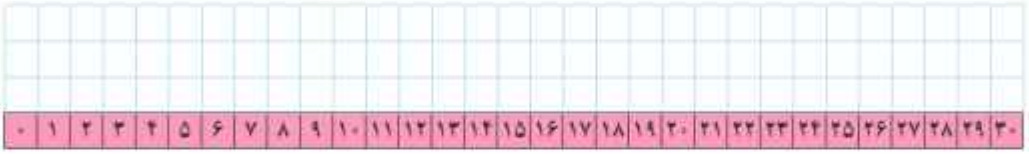
داده‌های مرتب‌شده را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

بازیکن الف	۳۰	۱۳	۱۱	۱۰	۱۰	۱۰	۷	۷	۶	۳	۳
بازیکن ب	۱۳	۱۲	۱۱	۱۱	۱۰	۱۰	۹	۹	۸	۷	

اگر هر یک از اعداد را به‌صورت نقطهٔ بالای یک محور علامت بزنیم، به نمودار حاصل، **نمودار نقطه‌ای داده‌ها** می‌گویند. نمودار نقطه‌ای امتیازهای بازیکن الف را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد.



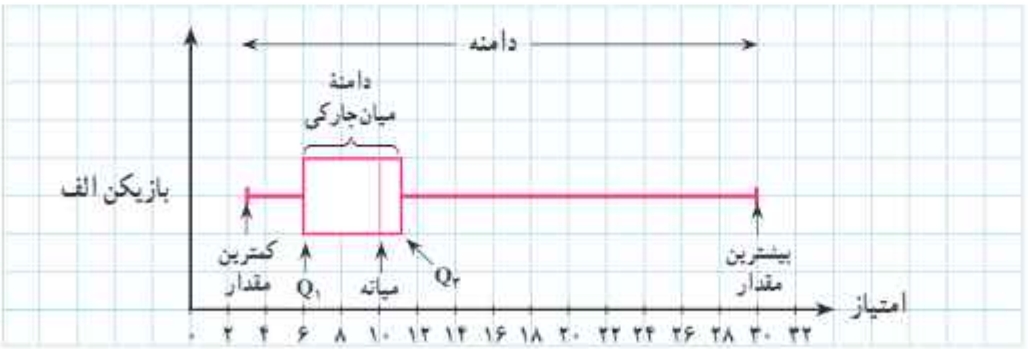
نمودار نقطه‌ای داده‌ها را برای بازیکن ب بر روی محور نمایش دهید.



به نظر شما کدام بازیکن بهتر است؟ البته این سؤال، کلی است و اگر به شما بگوییم این بازی آخر است یا گروه مقابل تاکنون امتیاز بیشتری نسبت به گروه شهر کسب کرده است، ممکن است پاسخ سؤال عوض شود.

در فصل گذشته برای تصمیم درست‌تر، از معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی به‌طور هم‌زمان استفاده می‌شد. پس خالی از لطف نیست که معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مجموعه‌های گوناگون از داده‌ها را به شکل تصویری مورد مقایسه قرار دهیم. امتیازهای بازیکن الف را در نظر بگیرید. برای این منظور، کمترین مقدار، چارک اول، میانه، چارک سوم و بیشترین مقدار را محاسبه کنید و روی یک محور نمایش دهید.

برای مشخص کردن حدود دامنهٔ میان‌چارکی، یک جعبه به عرض دلخواه رسم می‌کنیم. برای مشخص کردن دامنهٔ دو خط، از دو طرف جعبه به کمترین مقدار و بیشترین مقدار داده‌ها وصل می‌کنیم. با مشخص کردن میانه‌روی جعبه، نمودار جدیدی ارائه کرده‌ایم به نام **نمودار جعبه‌ای**. برای این منظور، خطی عمودی بکشید تا میانه مشخص شود.

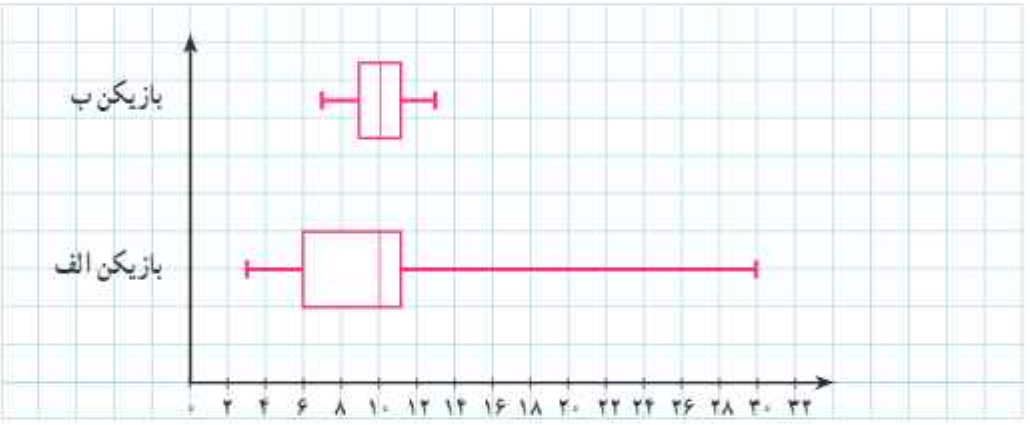


این نمودار، دامنه، دامنهٔ میان‌چارکی و میانهٔ مجموعه داده‌ها را به‌طور هم‌زمان نشان می‌دهد. بیش از یک مجموعه‌داده را می‌توان در یک نمودار نشان داد. این بدان معناست که این روش برای مقایسهٔ داده‌ها بسیار عالی است.

از آنجا که دو خط دوطرف جعبه شبیه سبیل گربه است، بعضی مواقع به آن نمودار جعبه و سبیل گفته می‌شود.

اگر داده‌ها دربرگیرندهٔ دادهٔ دورافتاده بودند، دامنه وسیع‌تر می‌بود. در نمودار جعبه‌ای، طول سبیل‌ها با توجه به مرزهای بالا و پایین افزایش می‌یابد. با نگاه کردن به سبیل‌های نمودار جعبه‌ای، می‌توانید به نامتقارن بودن داده‌ها پی ببرید.

نمودار جعبه‌ای امتیازهای دو بسکتبالیست در اینجا نشان داده شده است. دامنهٔ این امتیازها را مقایسه کنید. اگر مجبور بودید از بین این دو بازیکن، یک نفر را انتخاب کنید، کدام را انتخاب می‌کردید؟ اکنون بهتر می‌توانید به سؤال قبل در وضعیت‌های مختلف گروه مقابل یا حساسیت بازی تصمیم‌گیری کنید.



امتیازهای بازیکن ب دامنهٔ نسبتاً کوچکی دارد، ولی میانهٔ هر دو برابر با ۱۰ است.

امتیازهای بازیکن الف دامنهٔ بزرگی دارد. این بازیکن، گاهی امتیازهایی بسیار بیشتر از بازیکن ب می‌آورد، و گاهی هم بسیار کمتر.

بازیکن ب ثبات بیشتری دارد و معمولاً امتیازهایش بیشتر از بازیکن الف است (میانه‌ها و دامنهٔ میان‌چارکی را با هم مقایسه کنید)، پس بهتر است بازیکن ب را انتخاب کنیم.

نمودار جعبه‌ای، روشی سودمند برای نمایش دامنه‌ها و چارک‌های داده‌هاست. یک جعبه، مکان قرارگیری چارک‌ها و دامنهٔ میان‌چارکی را نشان می‌دهد و سبیل‌ها کمترین و بیشترین مقادیر داده‌ها را نشان می‌دهند. در یک نمودار جعبه‌ای می‌توان بیش از یک مجموعه‌داده را نشان داد؛ پس این نمودار برای مقایسه مناسب است.

دامنهٔ میان‌چارکی مفید به نظر می‌رسد. این دامنه در مورد بازیکنانی که گاه‌گاهی امتیازهای بسیار اندکی کسب می‌کنند چطور عمل می‌کند؟ اگر بازیکنی در روز مسابقه، بد بازی کند، برای مربی به قیمت از دست دادن قهرمانی در تیمگان (لیگ) تمام می‌شود. آیا دامنهٔ میان‌چارکی برای ما مشخص می‌کند که کدام بازیکن واقعاً ثبات بیشتری دارد یا دامنه ؟

مربی نباید فقط دامنهٔ امتیازهای بازیکنان را مقایسه کند. او به راهی نیاز دارد تا به‌طور دقیق از روی مقادیر موجود محاسبه کند که کدام بازیکن در روز مسابقه ثبات بیشتری دارد. به عبارت دیگر، او باید بازیکنی را پیدا کند که امتیازهایش کمترین تغییرات را داشته باشد.

مشکل دامنه و دامنهٔ میان‌چارکی این است که فقط تفاوت بین مقادیر کم و زیاد را به شما می‌گویند؛ اما نمی‌گویند که چند وقت به چند وقت، بازیکنان این امتیازهای کم و زیاد را در مقابل امتیازهای نزدیک به میانه کسب می‌کنند. این برای مربی مهم است.

کار در کلاس

برای مجموعه‌داده‌های زیر، نمودار جعبه‌ای بکشید.

۴/۸, ۲/۷۵, ۴/۱, ۱/۲۵, ۱/۵, ۲/۵, ۳/۱, ۳/۲, ۴/۲۵, ۴/۷۵, ۴/۹۵, ۵/۱

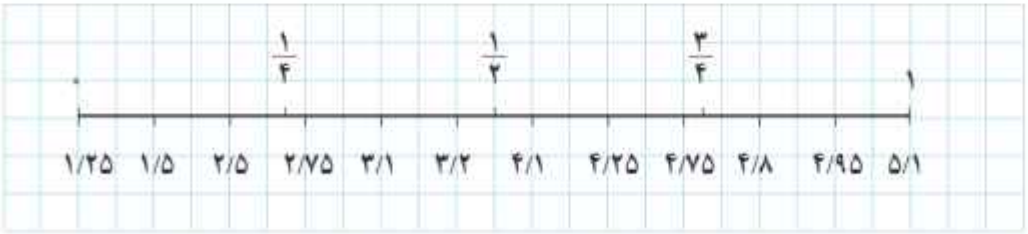
راهنمایی :

گام اول: کمترین مقدار و بیشترین مقدار را مشخص کنید.

از آنجا که اعداد به‌ترتیب از کوچک به بزرگ چیده شده‌اند، اولین عدد ..... مقدار است و آخرین عدد ..... مقدار.

گام دوم: چارک‌ها را مشخص کنید.

در این مجموعه ۱۲ عدد وجود دارد. می‌توانیم از شکل زیر یا از فرمول برای تعیین چارک‌ها استفاده کنیم.

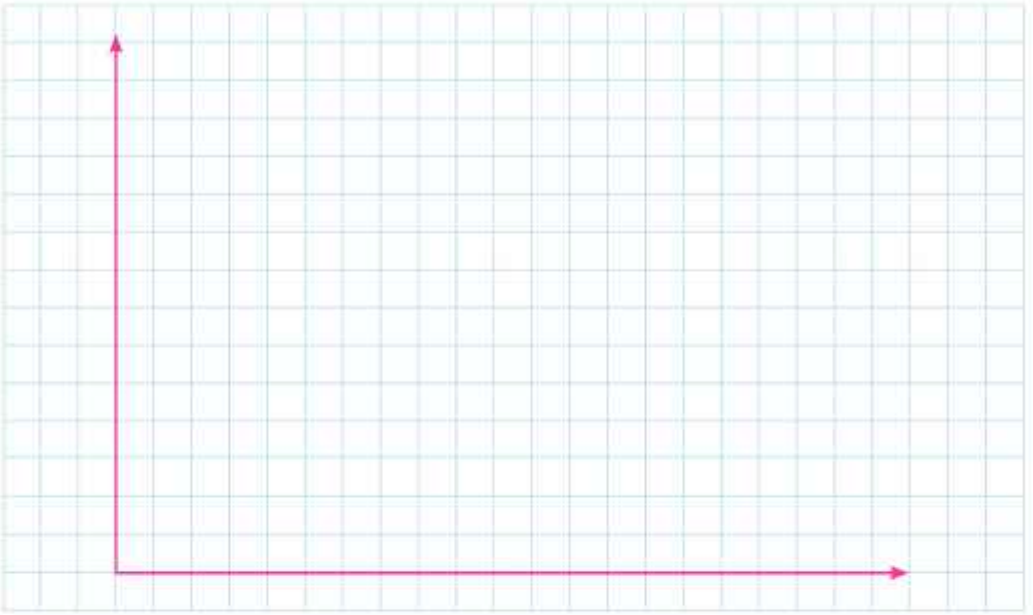


با نگاه به شکل بالا درمی‌یابیم که میانه بین مقادیر ..... و..... است. بنابراین، مقدار میانه می‌شود: .....

چارک اول، بین مقادیر..... و ..... قرار می‌گیرد. بنابراین، مقدار اولین چارک می‌شود : .....

چارک سوم بین مقادیر ..... و ..... قرار می‌گیرد. بنابراین، مقدار سومین چارک می‌شود : .....

گام سوم: نمودار جعبه‌ای را رسم کنید.



نمودارهای میله‌ای افقی درست شبیه نمودارهای میله‌ای عمودی‌اند، با این فرق که محورها چرخیده‌اند. در نمودارهای میله‌ای افقی، رده‌ها روی محور عمودی و درصد یا فراوانی روی محور افقی نشان داده می‌شود.
نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌ترند، اما نمودارهای میله‌ای افقی در صورتی که اسم رده‌ها طولانی باشد، مفید واقع می‌شوند. نمودارهای میله‌ای افقی برای نمایش اسامی رده‌ها، بدون نیاز به عمودی نوشتن، فضای زیادی را در اختیارمان می‌گذارند.

تمرین

۱. نمودارهای میله‌ای، فراوانی یا درصدها را نشان می‌دهند. چه زمانی باید از فراوانی‌ها استفاده کرد و چه زمانی از درصدها؟

۲. نمودارهای میله‌ای افقی، درست شبیه نمودارهای میله‌ای عمودی هستند؛ با این تفاوت که محورها چرخیده‌اند. نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌تر هستند. به نظر شما رسم نمودارهای میله‌ای افقی چه زمانی مفید است؟

۳. سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است:

۲۵, ۲۶, ۲۱, ۳۱, ۳۳, ۲۵, ۲۵, ۲۹, ۲۳, ۲۷, ۲۶, ۲۵, ۲۲, ۲۳, ۱۸, ۳۱, ۱۹, ۲۹, ۲۶, ۲۶, ۲۴, ۲۷

الف) نمودار نقطه‌ای آن را رسم کنید و مقادیر میانگین، مد و میانهٔ سن بازیکنان این تیم را روی محور افقی نشان دهید.

ب) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم کنید.

پ) آیا تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین است، بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها کمتر از میانگین است؟

ت) آیا تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانه است بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها کمتر از میانه است؟ میانه و میانگین را در این بررسی مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) سن چه تعدادی از بازیکنان، بین چارک اول و سوم قرار دارد؟ آیا بدون محاسبهٔ چارک‌ها می‌توانستید به این سؤال پاسخ دهید؟

درس ۲

نمودارهای چندمتغیره

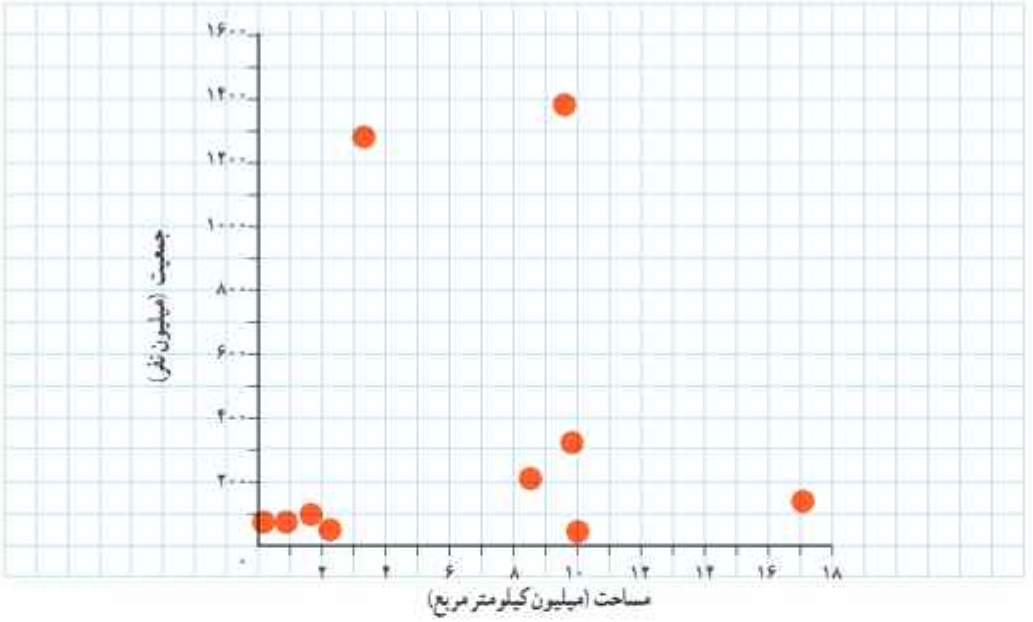
فعالیت

یوریا علاقهٔ زیادی به جغرافیا دارد. او فهرستی از مقادیر سه متغیر مربوط به ۱۰ کشور را تهیه کرده است:

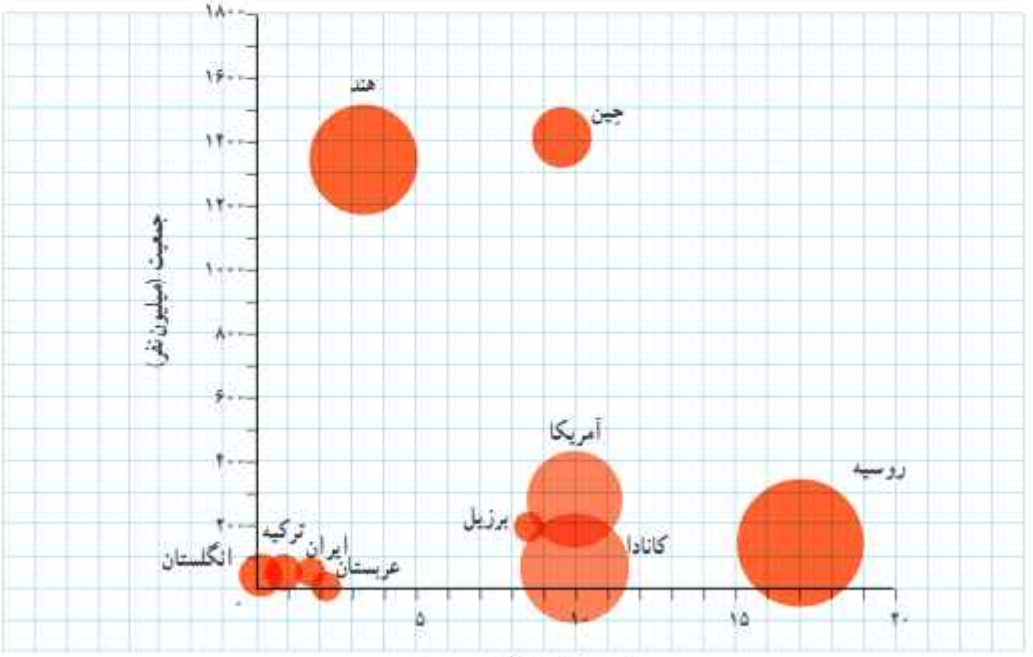
	نام کشور	جمعیت (نفر)	مساحت (کیلومتر مربع)	آب‌ها (درصد)
۱	ایران	۷۹,۲۰۰,۰۰۰	۱,۶۴۸,۱۹۵	۰/۷۰
۲	آمریکا	۳۲۲,۳۶۹,۳۱۹	۹,۸۵۷,۳۰۶	۷/۱۰
۳	انگلستان	۶۴,۷۱۶,۰۰۰	۲۴۲,۴۹۵	۱/۳۴
۴	برزیل	۲۰۵,۳۳۸,۰۰۰	۸,۵۱۵,۷۶۷	۰/۶۵
۵	ترکیه	۷۹,۴۶۳,۶۶۳	۸۱۴,۵۷۸	۱/۳۰
۶	چین	۱,۳۷۶,۰۴۹,۰۰۰	۹,۵۹۶,۹۶۱	۲/۸۰
۷	روسیه	۱۴۴,۱۹۲,۴۵۰	۱۷,۰۹۸,۲۴۲	۱۳/۰۰
۸	عربستان	۳۰,۷۷۰,۳۷۵	۲,۱۴۹,۶۹۰	۰/۷۰
۹	کانادا	۳۶,۰۴۸,۵۲۱	۹,۹۸۴,۶۷۰	۸/۹۲
۱۰	هند	۱,۲۷۶,۲۶۷,۰۰۰	۳,۲۸۷,۲۶۳	۹/۶۰

یوریا می‌داند که برای هر کدام از متغیرهای مربوط به کشورها، یعنی مساحت و جمعیت و درصد آب‌ها، می‌تواند نموداری میله‌ای رسم کند. برای هر جفت از این متغیرها هم می‌تواند پراکنش‌نگاشت رسم کند (مثلاً نمودار جمعیت در مقابل مساحت)؛ امّا این سؤال برایش مطرح است که آیا راهی وجود دارد تا هر سه متغیر مربوط به این کشورها را به‌طور هم‌زمان فقط در یک نمودار نشان دهد؟

پراکنش نگاشت جمعیت در مقابل مساحت کشورها



پوریا همین‌طور که به پراکنش‌نگاشت جمعیت در مقابل مساحت کشورها نگاه می‌کرد، ناگهان به این فکر افتاد که اندازهٔ نقطه‌های نمودار را متناسب با درصد آب‌های کشورها رسم کند. پس نموداری به‌شکل زیر کشید:



به این ترتیب، او موفق شد سه متغیر مربوط به کشورها را در یک نمودار، نمایش دهد. نموداری که پوریا رسم کرد، به نام **نمودار حبابی** معروف است.

هر نقطه یا دایره در نمودار حبابی، در واقع یک سه‌تایی مرتب به‌صورت (v_1, v_2, v_3) را مشخص می‌کند، که در آن داریم:

v_1 : موقعیت نقطه روی محور افقی،

v_2 : موقعیت نقطه روی محور عمودی،

v_3 : اندازهٔ نقطه (مساحت دایره).

نمودارهای حبابی را می‌توان گونهٔ خاصی از پراکنش‌نگاشت دانست که برای نمایش هم‌زمان سه متغیر عددی به کار می‌روند و در آنها به‌جای نقطه از دایره‌های توپُر استفاده می‌شود.

سیستم بینایی انسان به‌طور طبیعی اندازهٔ یک دایره را بر اساس مساحت آن در نظر می‌گیرد. مساحت دایره هم بر خلاف قطر یا محیط آن، متناسب با شعاع دایره نیست؛ بلکه متناسب با توان دوم شعاع است. پس اگر شعاع دایره‌ها را دقیقاً متناسب با مقادیر متغیر سوم در نظر بگیریم، اختلاف ظاهری اندازهٔ دایره‌ها غیر واقعی و گمراه‌کننده خواهد بود. برای برطرف کردن این مشکل باید شعاع دایره‌ها را متناسب با جذر مقادیر متغیر سوم در نظر گرفت.

توجّه: متغیر سوم در نمودارهای حبابی نباید دارای مقادیر منفی یا صفر باشد.

کار در کلاس

قد و وزن و نمرهٔ درس‌های ریاضی و ادبیات فارسی دانش‌آموزان کلاس را مشابه آنچه در فعالیت دیدید، در یک جدول یادداشت کنید.

برای هر کدام از دسته‌های سه‌تایی متغیرهای زیر، نمودار حبابی رسم کنید:

الف) قد، وزن، نمرهٔ ریاضی　　**ب)** قد، وزن، نمرهٔ ادبیات فارسی

پ) قد، نمرهٔ ریاضی، نمرهٔ ادبیات فارسی

سپس در هر نمودار، جای متغیرها را چنان عوض کنید؛ که دایره‌ها هر بار، نشان‌دهندهٔ یکی از متغیرها باشند.

تمرین

۱. مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدام‌یک از موارد زیر است؟

الف) شعاع دایره‌ها　　**ب)** قطر دایره‌ها

پ) محیط دایره‌ها　　**ت)** مساحت دایره‌ها

۲. نمودارهای حبابی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می‌روند؟

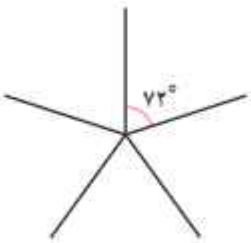
الف) یک متغیر　　**ب)** دو متغیر

پ) سه متغیر　　**ت)** محدودیتی ندارد

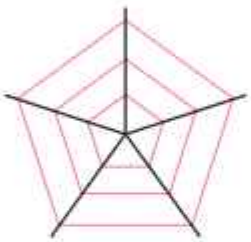
اطلاعات اضافی دربارهٔ واحدهای آماری (علاوه بر سه متغیّر اصلی) را می‌توان با استفاده از رنگ‌ها و طرح‌ها وارد نمودار حبابی کرد. مثلاً در نمودار مربوط به درصد آب‌های کشورها می‌توان قاره‌های مختلف را با رنگ‌های متفاوت دایره‌ها مشخص کرد. اگر علاوه بر آن بخواهیم زبان رسمی کشورها را هم در نمودار مشخص کنیم، چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟

نمودار راداری :

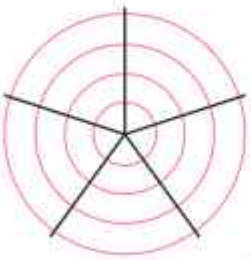
استفاده از نمودار راداری، روشی برای نمایش داده‌های چندمتغیره در قالب نموداری دوبُعدی است، که در آن سه متغیر کمّی یا بیشتر بر روی محورهایی نشان داده می‌شوند که نقطهٔ شروع همهٔ آنها یکی است. محل قرارگیری و زاویهٔ محورها نسبت به یکدیگر، هیچ اطلاعات خاصی را بیان نمی‌کند.



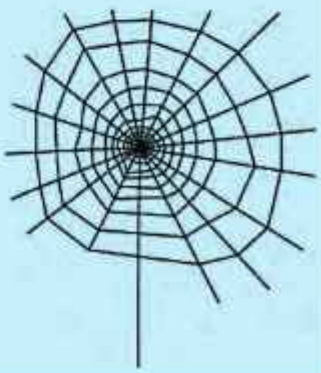
نمودار راداری از چند خط (به‌طور دقیق‌تر: نیم‌خط) به شکل پرّه‌های چرخ دوچرخه تشکیل می‌شود که در نقطه‌ای مرکزی به یکدیگر اتصال دارند و با زاویه‌های یکسان بین هم، گرداگرد آن نقطه قرار گرفته‌اند. هر کدام از این خطوط، در واقع یک محور و نشان‌دهندهٔ یک متغیر است؛ پس می‌تواند درجه‌بندی شود. به این خطوط، اصطلاحاً **شعاع‌های نمودار راداری** می‌گویند.



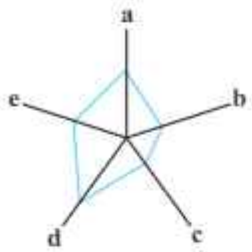
اگر درجه‌بندی شعاع‌ها به‌گونه‌ای انجام گیرد که فاصلهٔ بین نشانک‌های متوالی بر روی همهٔ شعاع‌ها یکسان باشد، می‌توان خطوط راهنمای مقادیر را هم رسم کرد؛ به‌شرطی که باعث شلوغیِ نمودار نشود.



گاهی این خطوط راهنما را به‌جای خط راست، به‌صورت خط خم و دایره رسم می‌کنند. در این حالت، نمودار واقعاً شبیه صفحهٔ نمایش رادار می‌شود.



از آنجا که نمودار راداری گاهی شبیه تار عنکبوت است، عدّه‌ای به آن «**نمودار تار عنکبوتی**» هم می‌گویند. اگر خطوط راهنما رسم نشوند، این نمودار ممکن است شبیه یک ستاره شود. به همین دلیل، آن را «**نمودار ستاره‌ای**» هم می‌نامند. البته نام‌های دیگری هم برای این نمودار وجود دارد.



نسبت مقدار یک متغیر، برای یک مشاهده به بیشینهٔ آن متغیر به‌ازای همهٔ مشاهده‌ها، اندازهٔ آن مقدار روی شعاع مربوط را مشخص می‌کند. این کار را برای همهٔ متغیرها و بر روی همهٔ شعاع‌ها انجام می‌دهیم. سپس نقاط مشخص‌شده روی شعاع‌های مجاور به‌ازای هر مشاهده را به هم وصل می‌کنیم. به این ترتیب، نمودار راداری برای یک مشاهده به دست خواهد آمد. اگر نمودار مربوط به دو یا چند مشاهده را روی هم بیندازیم، می‌توانیم مشاهده‌ها را با هم مقایسه کنیم.

نمودار راداری به ما می‌گوید:

- کدام مشاهده‌ها شبیه به یکدیگرند؟
- آیا دادهٔ دورافتاده‌ای وجود دارد؟
- مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟
- مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده‌های دیگر بیشتر یا کمتر است؟

از این نمودار در ورزش برای نشان دادن میزان قدرت و ضعف بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می‌شود.

توپ طلای فدراسیون بین‌المللی فوتبال (فیفا)، جایزه‌ای سالانه بود که در سال‌های ۲۰۱۰ تا ۲۰۱۵ میلادی توسط فیفا و مجلهٔ فرانس‌فوتبال به بهترین بازیکن فوتبال مرد جهان داده می‌شد. انتخاب بهترین بازیکن بر اساس رأی‌گیری از نمایندگان رسانه‌های بین‌المللی و سرمربیان و کاپیتان‌های تیم‌های ملّی فوتبال صورت می‌گرفت.

یادآوری:

منظور از **مشاهده** یا **نقطهٔ داده‌ای** در آمار، مجموعه‌ای است شامل یک یا چند مقدار اندازه‌گیری شده برای یک عضو جامعهٔ آماری (= واحد آماری).

مثلاً اگر واحدهای آماری، دانش‌آموزان کلاس باشند و سن و قد و وزن و گروه خونی آنان را ثبت کنیم، مجموعهٔ مقادیر این متغیرها برای هر کدام از دانش‌آموزان، یک «مشاهده» است.

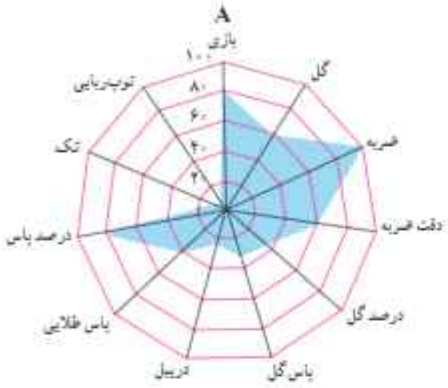
◆ **مثال:** نامزدهای نهایی دریافت جایزهٔ «توپ طلا» در سال ۲۰۱۳ میلادی، سه بازیکن A و B و C بودند که در نهایت، جایزه به بازیکن A تعلق گرفت.

برای اینکه ببینیم آیا این انتخاب عادلانه بوده است یا نه، داده‌های گردآوری شده از این سه بازیکن در طول فصل ۲۰۱۳ـ۲۰۱۲ را بررسی می‌کنیم. (همهٔ داده‌ها، به‌جز تعداد بازی، به‌صورت میانگین مقادیر اندازه‌گیری شده در طول هر ۹۰ دقیقه محاسبه شده‌اند.)

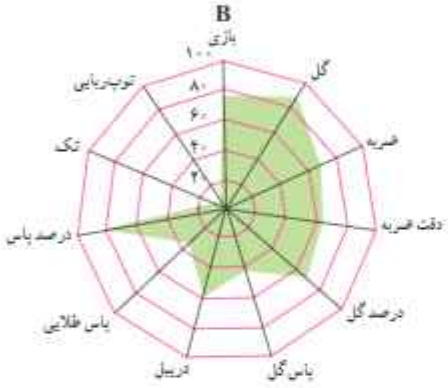
متغیر	A	B	C	بیشینه
تعداد بازی	۳۰/۱	۲۹/۱	۲۳/۵	۳۸
گل زده (غیر از پنالتی)	۰/۹۳	۱/۴۴	۰/۴۳	۱/۶
ضربه به سمت دروازه	۷/۷۸	۵/۶	۲/۷۷	۸
دقت ضربه (درصد)	۴۴/۶	۴۹/۱	۴۷/۷	۷۵
ضربه‌های گل شده (درصد)	۱۴/۵	۲۸	۱۵/۳	۴۰
پاس گل	۰/۳۳	۰/۴۱	۰/۶	۱
دریبل موفق	۱/۸۹	۴/۱۹	۵/۲	۷
پاس طلایی (مهم)	۲/۰۵	۱/۵۸	۳/۶۶	۵
پاس‌های موفق (درصد)	۷۶/۸	۸۵	۸۷/۸	۹۵
تک (تکل)	۰/۴۶	۰/۶۵	۱/۱۵	۶
توپ‌ربایی	۰/۳	۰/۳۴	۰/۸۹	۶

اکنون نمودار راداری مربوط به هر سه بازیکن را رسم می‌کنیم.

ملاحظه می‌شود که تعداد ضربه‌های بازیکن A به سمت دروازه، تقریباً به حد نهایی نمودار رسیده است. یعنی تعداد ضربه‌های او به سمت دروازه، بیشتر از هر بازیکن دیگری در جهان بوده است؛ امّا از سوی دیگر، تعداد دریبل‌های موفق او به‌ویژه نسبت به دو نامزد دیگر، خیلی کم است.

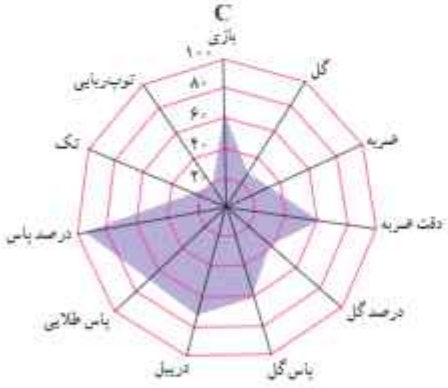


تعداد گل‌های زدهٔ بازیکن B در جریان بازی، نزدیک به حد نهایی نمودار شده و از این لحاظ، او جزو برترین‌های جهان بوده است. درصد ضربه‌هایی هم که او به سمت دروازه زده و گل شده (درصد گل)، بسیار زیاد است. به‌طور کلّی، ناحیهٔ مربوط به گل زدن در نمودار بازیکن B، وسعت زیادی دارد.

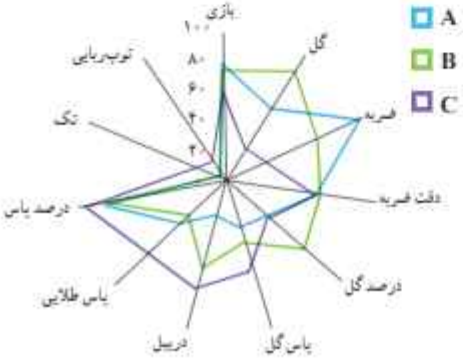


نمودار بازیکن C به‌شکل جذّابی کاملاً متفاوت با نمودار دو نامزد دیگر است. علت این موضوع، نقش متفاوت او در زمین است.

نمودار بازیکنان A و B شباهت زیادی به هم داشت. آنان از بزرگ‌ترین گلزنان‌اند؛ اما بازیکن C یک «گل‌ساز» بزرگ است. با اینکه آمار تعداد گل‌های او برای یک هافبک کناری، بسیار خوب است و درصد ضربه‌های گل شده‌اش نیز عالی است، درخشش اصلی او در آمار پاس و دریبل است. ببینید که ناحیهٔ مربوط به پاس و دریبل در نمودارش چه وسعت زیادی دارد.



اگر داده‌های مربوط به هر سه نفر را در قالب یک نمودار رسم کنیم، شاید مقایسهٔ بین آنان آسان‌تر شود. اکنون آیا می‌توانید بگویید که کدام بازیکن، شایستگی بیشتری برای دریافت توپ طلای سال ۲۰۱۳ میلادی داشت؟



کار در کلاس

آموزگارتان شش درس را انتخاب و برای شما به‌صورت زیر فهرست می‌کند :

۱ـ ..... ۲ـ .....

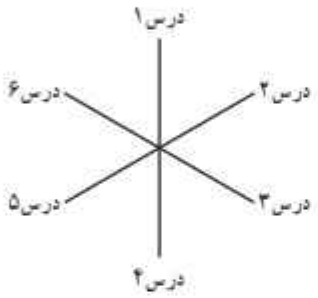
۳ـ ..... ۴ـ .....

۵ـ ..... ۶ـ .....

الف) نمودار راداری نمره‌های خود را به‌صورت مقابل رسم کنید:

ب) نمودار خود را با یکی دیگر از دانش‌آموزان ادغام کنید و با کمک یکدیگر، نمودار جدیدی رسم کنید.

پ) به نظر شما نمره‌های کدامتان بهتر است؟



تمرین

۱. نمودار راداری برای نمایش داده‌های چند متغیر کمّی به‌طور هم‌زمان به کار می‌رود؟

۲. زاویهٔ بین شعاع‌های مجاور در نمودار راداری، چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۳. نمودار راداری چه چیزی به ما می‌گوید؟

۴. کاربرد نمودار راداری در ورزش چیست؟

۵. اگر زاویهٔ بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری، ۴۰ درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟

۶. داده‌های زیر را که مربوط به شاخص‌های سلامت است، در قالب یک نمودار راداری نمایش دهید:

	متغیر	ایران	پاکستان	ترکیه	بیشینه
x_1	عمر مورد انتظار در بدو تولد (سال)	۷۵/۵	۶۶/۴	۷۵/۸	۸۴
x_2	نسبت متخصصان سلامت (به‌ازای هر ۱۰ هزار نفر جمعیت)	۲۳/۰	۱۴/۰	۴۱/۱	۲۴۵
x_3	نسبت ولادت‌ها به‌وسیلهٔ متخصصان سلامت (درصد)	۹۶	۵۲	۹۷	۱۰۰
x_4	نسبت جمعیت دارای دسترسی به شبکهٔ فاضلاب	۹۰	۶۴	۹۵	۱۰۰
x_5	شاخص آمادگی اجرای مقررات بین‌المللی سلامت	۸۵	۴۳	۷۸	۱۰۰

(داده‌ها برگرفته از گزارش آماری سازمان جهانی بهداشت، سال ۲۰۱۶ میلادی)

* منابع

۱. ا. آشفته (۱۳۹۵)، ترفندها و سراد آماری، خانه آمار اصفهان.

۲. ج. بهبودیان (۱۳۹۳)، آمار و احتمال مقدماتی، انتشارات آستان قدس.

۳. گروه مؤلفان (۱۳۹۵)، آمار و مدل‌سازی، وزارت آموزش و پرورش.

4. C.H. Brase and C.P. Brase (2012). Understandable Statistics, Brooks/Cole.

5. D. Griffiths (2009). Head First Statistics, O'Reilly Media.

6. S. McKillup (2004). Statistics Explained: An Introductory Guide for Life Scientists, Cambridge Univ. Press.

7. A. J. Vickers (2009). What is a p-value anyway? 34 Stories to Help You Actually Understand Statistics, Pearson.

8. Written by Volunteers (2014). Everything Maths: Grade 10 and 11 Mathematical Literacy, Siyavula.

معلّمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب کتاب‌های درسی از طریق سامانه «نظرسنجی از محتوای کتاب درسی» به نشانی «nazar.roshd.ir» یا نامه به نشانی تهران ـ صندوق پستی ۴۸۷۴ ـ ۱۵۸۷۵ ارسال کنند.

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی